Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole septembre 1987

EXERCICE 1 **4 points**

1. Soit h la fonction définie par $h(x) = x^2\text{e}^{-x}$. On pose

$$K = \int_0^1 h(x)\,\text{d}x.$$

Montrer que $K = 2 - \dfrac{5}{\text{e}}$ (on pourra utiliser la méthode d'intégration par parties ou chercher une primitive H de h sous la forme

$$H(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\text{e}^{-x},$$

où a, b, c sont des réels à déterminer).

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2\text{e}^{-x}}$. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$. (On ne cherchera pas à calculer I.)

a. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant x^2\text{e}^{-x} \leqslant 1.$$

Vérifier que pour tout u de l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$1 - u \leqslant \frac{1}{1+u} \leqslant 1 - \frac{u}{2}.$$

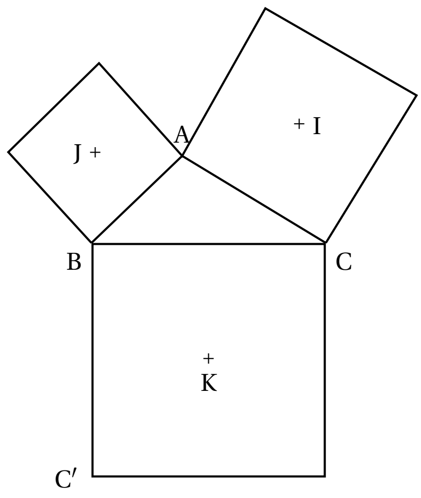
b. En déduire que $1 - K \leqslant I \leqslant 1 - \dfrac{K}{2}$; donner un encadrement de I d'amplitude égale à $0,1$.

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan est orienté. On considère un triangle ABC tel que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ est un nombre compris entre 0 et π.

On construit à l'extérieur de ce triangle trois carrés de côtés respectifs CA, AB et BC et on désigne par I, J et K leurs centres, conformément à la figure. On a

$$\left(\overrightarrow{\text{IC}}, \overrightarrow{\text{IA}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{JA}}, \overrightarrow{\text{JB}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{KB}}, \overrightarrow{\text{KC}}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$



On veut démontrer que les segments lB et JK sont orthogonaux et ont même longueur. On considère la similitude directe S_1 de centre C qui transforme I en A et la similitude directe S_2 de centre B qui transforme A en J.

1. Donner les rapports et les angles de S_1 et de S_2. Quelle est la nature de la transformation $S_2 \circ S_1$?

2. Préciser les images de I et de B par $S_2 \circ S_1$.

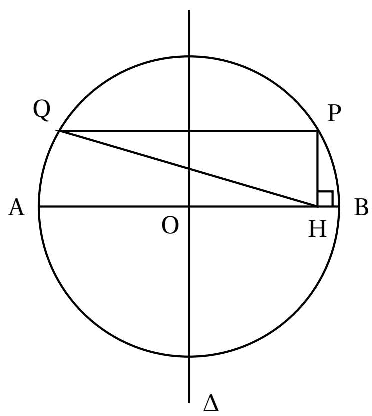
3. Conclure.

PROBLÈME **12 points**

Le problème propose trois approches différentes de l'étude d'un triangle particulier. Les trois parties du problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

A. Soit [AB] un diamètre du cercle ($\mathscr{C}$) de centre 0 et de rayon R (on prendra R = 2 cm pour la figure). On appelle (Δ) la médiatrice de [AB] et $\mathscr{A}$ la famille des triangles PQH définis ainsi :

P est un point du cercle ($\mathscr{C}$).
Q est le symétrique de P par rapport à (Δ).
H est le projeté orthogonal de P sur (AB).



Soit PQH un triangle de la famille $\mathscr{A}$.

1. Montrer que PQ = 2OH et que PQH est isocèle si, et seulement si, PH = 2OH.
En déduire que PQH est isocèle si, et seulement si, P est l'intersection de ($\mathscr{C}$) et de l'une ou l'autre de deux droites que l'on déterminera.

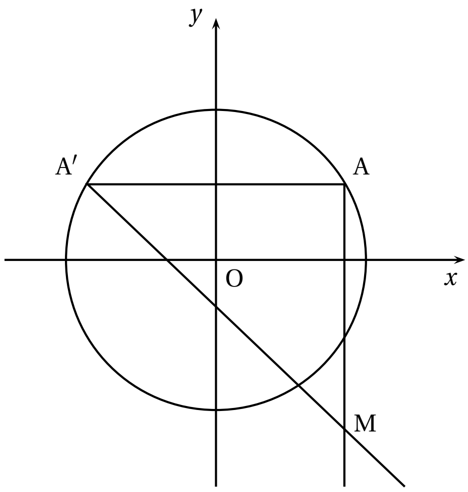
2. Faire une figure représentant les triangles isocèles de la famille $\mathscr{A}$.

B. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes (Ox) et (Oy). (pour la figure demandée, on prendra l'unité égale à 2 cm).

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre 0 et de rayon l'unité.

À tout point A du cercle $(\mathscr{C})$ on associe le point A$'$, symétrique de A par rapport à (Oy), et le point M, intersection de la parallèle à (Oy) passant par A et de la parallèle à la droite d'équation $y = -x$ passant par A$'$.

On pose $\theta = \left(\vec{\imath}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$ $\left(\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right[\right)$.



1. Montrer que les coordonnées x et y de M s'expriment par les formules :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos\theta \\ y & = & \sin\theta - 2\cos\theta. \end{array}\right.$$

2. Soit (Γ) la courbe paramétrée, ensemble des points M(θ) de coordonnées

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos\theta \\ y & = & \sin\theta - 2\cos\theta. \end{array}\right.$$

θ variant dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

a. Montrer que les points M(θ) et M$(\theta + \pi)$ sont symétriques par rapport à O. On appelle (Γ_1) l'ensemble des points M(θ) lorsque θ décrit $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b. Étudier les variations de $x(\theta)$ et $y(\theta)$ pour θ élément de l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On pourra montrer que sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$

$$y'(\theta) = 2\cos\theta\left(\frac{1}{2} + \tan\theta\right)$$

et introduire l'unique réel α de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ vérifiant

$$\tan\alpha = -\frac{1}{2}.$$

c. Déterminer les coordonnées des points M$\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ et M$\left(\dfrac{1}{2}\right)$, et donner un vecteur directeur de la tangente à (Γ) en chacun de ces points. En quel point la tangente à (Γ_1) est-elle parallèle à (Oy) ? Donner des valeurs approchées à 10^{-2} près des coordonnées de M(α).

d. Construire, sur un même dessin, le cercle $(\mathscr{C})$, la courbe (Γ_1) puis la courbe (Γ) : placer en particulier les points introduits en c. ainsi que les tangentes à (Γ) en ces points.

3. Utiliser (Γ) et le cercle $(\mathscr{C})$ pour tracer sur la figure précédente, un triangle isocèle de la famille (d) définie en A.

C. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'axes (Ox) et (Oy). (Pour les figures demandées, on prendra l'unité égale à 2 cm).

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon l'unité. Soit N le point d'abscisse a de l'axe (Ox) avec a élément de l'intervalle $[-1~;~1]$. La parallèle à la droite d'équation $(y = -x)$ passant par N coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en deux points ; on note E celui de ces points dont l'abscisse est la plus petite. Soit E$'$ le symétrique de E par rapport à (Oy) et N$'$ le projeté orthogonal de E$'$ sur (Ox).

1. Montrer que l'abscisse de N$'$ est

$$a' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-a^2} - a\right).$$

2. Montrer qu'il existe un unique point vérifiant N = N$'$; calculer son abscisse r.

On note R ce point.

Établir que le triangle REE$'$ est rectangle et isocèle.

3. On considère la suite de points ainsi définie :

N_0 est le point O et pour tout k entier positif ou nul, N_{k+1} est le milieu de $\left[\text{N}_k\text{N}'_k\right]$ où N'_k est le point associé à N_k par le procédé exposé ci-dessus.

a. Faire une figure illustrant la construction de N_1 et N_2.

b. Soit U_k l'abscisse de N_k (par construction de N_k, U_k appartient à $[0~;~1]$).

Soit g la fonction définie sur $[0~;~1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2-x^2} - x\right).$$

Montrer que pour tout entier k positif ou nul, $u_{k+1} = g\left(u_k\right)$; montrer que $g(r) = r$.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier k positif ou nul,

$$\left|u_{k+1} - r\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|u_k - r\right|.$$

En déduire que la suite (u_k) converge vers r.

c. Démontrer que $\text{N}_3\text{R} \leqslant 10^{-2}$.