Durée : 4 heures

Baccalauréat C Paris[1] juin 1987

EXERCICE 1 **5 points**

Dans le plan orienté, on considère quatre points A, B, C, D distincts deux à deux. On note I le milieu de [BD], J le milieu de [AC] et O l'isobarycentre de (A, B, C, D).
On construit les triangles rectangles isocèles ABM, BCN, CDP et DAQ tels que les angles orientés $\left(\overrightarrow{\text{MB}}, \overrightarrow{\text{MA}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{NC}}, \overrightarrow{\text{NB}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{PD}}, \overrightarrow{\text{PC}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{QA}}, \overrightarrow{\text{QD}}\right)$ admettent pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$. On note K le milieu de [MP] et L le milieu de [NQ].
On se propose d'étudier la configuration (I, J, K, L). À cet effet, on pourra prendre un repère orthonormal direct d'origine O et introduire les affixes a, b, c, d de A, B, C, D, les affixes m, n, p, q de M, N, P, Q et les affixes f, g, k, l de I, J, K, L.

1. Déterminer le milieu de [IJ].
2. Prouver que $m(1-\text{i}) = a - \text{i}b$. Calculer de manière analogue n, p et q.
3. Déterminer l'isobarycentre de (M, N, P, Q). En déduire le milieu de [KL].
4. Effectuer une figure soignée en prenant
   $a = -2+2\text{i}$, $b = -2-\text{i}$, $c = -2\text{i}$ et $d = 4+\text{i}$.
5. Soit r le quart de tour direct de centre O. Montrer que $r(\text{J}) = \text{K}$.
6. Caractériser les configurations (A, B, C, D) telles que I = J.
   Indiquer alors la position de K et de L et la nature de (M, N, P, Q).
   Ce cas étant écarté, prouver que (I, K, J, L) est un carré de centre O.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que
$(\text{AB}, \text{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.
On note I, J, K les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

1. On désigne par Γ_A, Γ_B et Γ_C les cercles de diamètres respectifs [AI], [BI] et [CI].
   a. Effectuer une figure : on dirigera (BC) suivant l'axe des abscisses et on prendra 8 cm pour longueur de [BC].
   b. Soit r la rotation de centre I et d'angle ayant pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer les images par r de Γ_C et Γ_A.
   Par quelle transformation simple passe-t-on de Γ_C à Γ_B ?
2. Pour tout point M de Γ_A distinct de I, J et K, on note N le point où la droite (MK) recoupe Γ_B et P le point où la droite (MJ) recoupe Γ_C.
   a. Établir que les droites (IM) et (IP) sont orthogonales. (On pourra utiliser la cocyclicité des points A, M, I, J et des points C, P, I, J).
   b. Déterminer les images par r de P et de M. En déduire que I est le milieu de [NP] et que le triangle MNP est rectangle isocèle. Préciser ce triangle sur la figure.
   c. Déterminer une similitude directe transformant ABC en MNP.

PROBLÈME **11 points**

Dans ce problème, on étudie la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

1. Paris, Créteil, Versailles

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et } f(0) = 1$$

ce qui fait l'objet de la partie I. Dans la partie II, on décrit une méthode de calcul d'une valeur approchée de l'intégrale

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Partie I Étude de la fonction f

1. Dérivation de f

   Montrer que f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et calculer la dérivée de f sur cet intervalle.

2. Signe de f

   a. Déterminer les nombres réels $x \geqslant 0$ tels que $f(x) = 0$. On rangera ces nombres en une suite strictement croissante $(a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots)$.

   b. Étudier le signe de f

3. Encadrement de f

   a. Prouver que pour tout nombre réel $x > 0$,

   $$-\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

   En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   b. Déterminer les nombres réels $x > 0$ tels que $f(x) = \frac{1}{x}$ et ceux tels que $f(x) = -\frac{1}{x}$.

   On rangera ces nombres en des suites strictement croissantes $(b_1, b_2, \cdots, b_k, \cdots$ et $(c_1, c_2, \cdots, c_k, \cdots)$.

   c. En déduire la position relative de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f et des courbes représentatives H_+ de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et H_- de $x \longmapsto -\frac{1}{x}$.

   Comparer les tangentes à $\mathscr{C}$ et H_+ au point d'abscisse b_k ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}$ et H_- au point d'abscisse c_k.

4. Variations de f

   a. Étudier le signe de $x \longmapsto \tan x - x$ sur $\left]0~;~\frac{\pi}{2}\right[$.

   En déduire le signe de f' sur cet intervalle.

   b. Prouver que pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe un élément x_k et un seul de $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi~;~\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ tel que $\tan x_k = x_k$; montrer que $x_k > k\pi$.

   c. En déduire le signe de f' sur $]0~;~x_1[$, puis sur chaque intervalle $]x_k~;~x_{k+1}[$, où $k = 1, 2, \cdots$

5. Étude de f en 0

   a. Prouver que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

   $$0 \leqslant x - \sin x \leqslant \frac{x^2}{6}$$

   (Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0~;~+\infty[$ par

   $$\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

   on calculera les dérivées φ', φ'' et φ''' et on en déduira le signe de φ).

b. Prouver que f est dérivable au point 0 et calculer $f'(0)$.

6. Courbe représentative de f

a. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0 ; 3\pi]$.

b. Tracer sur une même figure les courbes H_+, H_- et $\mathscr{C}$ en se limitant à l'intervalle $[0 ; 3\pi]$ et placer les points a_k, b_k, c_k et x_k.
On utilisera les valeurs approchées

$$x_1 \approx 4,49 \quad \text{et} \quad x_2 \approx 7,73.$$

(Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 3 cm sur l'axe des ordonnées,)

Partie II Approximation de l'intégrale J

1. Transformation de J
Pour tout élément u de $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, on pose

$$F(u) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

et pour tout élément x de $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ on pose

$$G(x) = \int_0^x \frac{\sin \pi t}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

a. Prouver que pour tout élément x de $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$:

$$G(x) = F(\pi) - F[\pi(1-x)].$$

(On pourra comparer les dérivées des deux membres.)

b. En déduire que

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi t}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Approximation de J
Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi t\,\mathrm{d}t \quad \text{et si} \quad n \geqslant 1,\ u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin \pi t\,\mathrm{d}t.$$

a. Prouver que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$J = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + r_n.$$

où

$$r_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin \pi t}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

b. Établir que, pour tout élément t de $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$

$$\frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \leqslant 2t^n$$

En déduire une majoration simple de r_n.

c. Montrer que

$$J = \lim_{n\to+\infty} \left(u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}\right).$$

3. Calcul des intégrales u_n

a. Calculer u_0 et u_1.

b. Établir que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)\,u_{n-2}\right].$$

4. *Conclusion*

À partir des résultats obtenus en 2. et 3., indiquer une méthode de calcul d'une valeur approchée de J à la précision 10^{-2}. (On ne demande pas d'effectuer ce calcul.)