

∞ Baccaauréat C Polynésie juin 1987 ∞

EXERCICE 1

5 POINTS

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) . Dans tout l'exercice, t désigne un nombre réel tel que

$$0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante d'inconnue z :

$$z^2 - 2(1 + \cos 2t)z + 2(1 + \cos 2t) = 0.$$

Dans la suite de l'exercice, les solutions seront appelées z_1 et z_2 , z_1 désignant celle dont la partie imaginaire est strictement positive.

On note A le point d'affixe 1.

2. Étudier et représenter l'ensemble E_1 décrit par le point M_1 d'affixe z_1 lorsque t décrit l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$.

En déduire l'ensemble E_2 décrit par le point M_2 d'affixe z_2 quand t décrit le même intervalle et représenter E_2 .

3. a. Mettre z_1 sous forme trigonométrique.
 b. Soit M et M_1 les points d'affixes $z = 1 + e^{it}$ et z_1 .
 Montrer que la droite (OM_1) est parallèle à la droite (AM) .
 c. Comparer l'aire $A(t)$ du triangle AM_1M à celle du triangle AOM .
 Étudier le maximum de l'aire $A(t)$ lorsque t parcourt l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

EXERCICE 2

5 POINTS

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC direct, c'est-à-dire tel que l'angle orienté (\vec{AB}, \vec{AC}) admet une mesure comprise entre 0 et π .

On construit les triangles équilatéraux $A'BC$, $B'AC$ et $C'BA$ tels que les angles orientés $(\vec{A'C}, \vec{A'B})$, $(\vec{B'A}, \vec{B'C})$ et $(\vec{C'B}, \vec{C'A})$ admettent pour mesure $\frac{\pi}{3}$. Soient F, G et H les centres respectifs de ces triangles équilatéraux; on se propose de prouver que le triangle FGH est équilatéral direct.

1. Placer sur une figure les points et les triangles précédents.
2. On note r_1 , r_2 et r_3 les rotations d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ et de centres respectifs F, G et H.
 - a. Déterminer le déplacement $r_1 \circ r_2 \circ r_3$ (on pourra préciser l'image de B).
 - b. En déduire le centre et l'angle de la rotation $r = r_2 \circ r_3$.
 - c. En déduire aussi que les points F, G et H sont distincts deux à deux.
3. On note s la réflexion par rapport à la droite (GH).
 Déterminer les axes des réflexions s_2 et s_3 telles que $r_2 = s_2 \circ s$ et $r_3 = s \circ s_3$; montrer que ces axes se coupent en un point F' tel que $F'GH$ soit équilatéral direct.
4. Montrer enfin que $F' = F$.

PROBLÈME

10 POINTS

Dans ce problème, on se propose d'étudier les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par

$$f(t) = \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 \quad \text{et} \quad F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

A. Étude de la fonction f

1.
 - a. Étudier le signe de $1 - \ln t$ où $t \in]0; +\infty[$.
 - b. En déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe représentative C dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unités graphiques : $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 20$ cm).

B. - Étude de la fonction F

1. Étude au voisinage de $+\infty$:
 - a. Soit x un élément de $[1; +\infty[$. Prouver que pour tout élément t de $[x; 2x]$,

$$\frac{\ln^2 x}{t^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln^2 2x}{t^2}.$$

En déduire que

$$\frac{\ln^2 x}{2x} \leq F(x) \leq \frac{\ln^2 2x}{2x}.$$

- b. Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Étude au voisinage de 0.

- a. Soit x un élément de $]0; \frac{1}{2}]$. Établir que

$$\frac{\ln^2 2x}{2x} \leq F(x) \leq \frac{\ln^2 x}{2x}.$$

- b. Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 0.
3. Calcul de F .

- a. Calculer

$$\int_1^u \frac{\ln t}{t^2} dt,$$

puis

$$\int_1^u \frac{\ln^2 t}{t^2} dt,$$

(On pourra intégrer par parties.)

- b. En déduire que la fonction G définie sur $]0; +\infty[$ par

$$(1) \quad G(u) = -\frac{\ln^2 u}{u} - 2\frac{\ln u}{u} - \frac{2}{u}.$$

est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

c. Prouver finalement que

$$(2) \quad F(x) = G(2x) - G(x).$$

4. Variations de F .

- a. À l'aide de (2), calculer la dérivée de F .
- b. Montrer que $F'(x) = 0$ si et seulement si $(\ln 2x)^2 = 2(\ln x)^2$.
- c. Prouver que cette équation admet deux solutions x_1 et x_2 telles que $x_1 < 1 < x_2$. Donner une valeur approchée de x_1 et x_2 à la précision 10^{-6} .
- d. Étudier le signe de F' .

5. Courbe représentative de F .

- a. Dresser le tableau de variations de F . Utiliser (2) pour préciser les valeurs de F aux points 1, x_1 et x_2 .
- b. Construire la courbe représentative Γ de F . (On prendra les mêmes unités graphiques que dans la partie A.)