

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Étranger groupe I juin 1987 ∞

EXERCICE 1

4 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit A (6 ; 0 ; 0) et B(0 ; 6 ; 0). Faire une figure.

1. Déterminer le barycentre G du système (O, 1), (A, 2), (B, 3). Le placer sur la figure.
2. Soit C(0 ; 0 ; 4). Déterminer l'ensemble S des points M de l'espace définis par

$$(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = 0.$$

Donner une équation cartésienne de S.

3. Déterminer l'intersection de S et du plan d'équation $x = 0$.
Dessiner cette intersection sur la figure.
4. Soit P l'ensemble des points M de l'espace tels que $MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24$.
Montrer que G appartient à P. Déterminer P.

EXERCICE 2

5 points

Étant donné trois nombres réels strictement positifs α , β et γ on rappelle qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle dont les côtés mesurent respectivement α , β et γ est que :

$$|\alpha - \gamma| < \beta < \alpha + \gamma.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'unité 1 cm.

a est un réel donné strictement positif. On prendra pour la figure $a = 2$.

1. On appelle R, l'ensemble des points M du plan de coordonnées x et y tels qu'il existe un triangle ABC dont les côtés AB, BC et CA mesurent respectivement $2a$, y et x . Montrer que R est formé des points M du plan dont les coordonnées x et y vérifient $|2a - x| < y < 2a + x$.
Représenter R sur la figure.
2. Quel est l'ensemble des points M de R tels que le triangle ABC soit isocèle (on envisagera les différents cas possibles).
Représenter cet ensemble sur la figure.
3. Quel est l'ensemble des points M de R tels que le triangle ABC soit rectangle en C ?
Le représenter sur la figure.
4. Montrer que l'ensemble des points M de R tels que le triangle ABC soit rectangle en A, est inclus dans l'hyperbole H d'équation $y^2 - x^2 = 4a^2$.
Déterminer les coordonnées de ses sommets et préciser ses asymptotes.
Construire H toute entière sur la figure.

PROBLÈME

11 points

m étant un nombre réel, on appelle f_m l'application de $]0 ; +\infty[$ dans \mathbb{R} qui, à x , associe

$$f_m(x) = \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{m}{2} \ln x.$$

et \mathcal{C}_m sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (on choisit pour unité de longueur 5 cm).

A. L'objet de la partie A est l'étude de f_m

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$.
Calculer, suivant les valeurs de m , $\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x)$.
2. Calculer $f'_m(x)$ et donner suivant les valeurs de m , les différents tableaux de variation possibles.
3.
 - a. Montrer que, par un point $M_0(x_0; y_0)$ vérifiant $x_0 > 0$ et $x_0 \neq 1$, il passe une et une seule courbe \mathcal{C}_m .
 - b. Montrer qu'il existe un point unique A appartenant à toutes les courbes \mathcal{C}_m .
 - c. Construire \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_4 et \mathcal{C}_{-1} .

B. Dans la partie B, on considère la fonction f_4 telle que

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{4} - 2 \ln x.$$

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soit $x > 0$.
 - a. Calculer $\int_x^1 \ln t \, dt$ (on pourra utiliser une intégration par partie).
 - b. Calculer $F(x) = \int_x^1 f_4(t) \, dt$.
 - c. Chercher $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$ et donner une interprétation géométrique de cette limite.
2.
 - a. Montrer que l'équation $f_4(x) = 0$ possède deux solutions et deux seulement dont l'une x_0 appartient à $[3; 4]$. (On ne demande pas de calculer x_0 ici.)
Montrer que $x_0 = \sqrt{1 + 8 \ln x_0}$.
 - b. Soit $\varphi: [3; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \varphi(x) = \sqrt{1 + 8 \ln x}$$
Montrer que $\varphi(x) \geq 3$ et que $0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{4}{9}$.
 - c. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n) = \sqrt{1 + 8 \ln(u_n)}.$$

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3$.

- d. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{4}{9} |u_n - x_0|$. (On appliquera l'inégalité des accroissements finis).
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$; en déduire la convergence de (u_n) .
Trouver un entier n_0 tel que $|u_{n_0} - x_0| < 10^{-2}$.
Calculer une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.