

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1988 ∞

EXERCICE 1

4 points

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère l'application  $f$  de P dans P qui au point M d'affixe  $z$  associe le point M' d'affixe  $z'$  tel que

$$z' = 2z + iz\bar{z}.$$

1. Déterminer et construire l'ensemble des images des points d'ordonnée nulle.
2. Déterminer et construire l'ensemble des images des points d'abscisse nulle.
3. Déterminer et construire l'ensemble des images des points du cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 2

4 points

Soit E l'espace muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $P_1$  le plan d'équation  $x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$  et  $P_2$  le plan d'équation  $x\sqrt{3} - y + 1 = 0$ . Désignant par  $s_{P_1}$  (resp.  $s_{P_2}$ ) la symétrie orthogonale par rapport au plan  $P_1$  (resp.  $P_2$ ), on se propose de déterminer  $f = s_{P_2} \circ s_{P_1}$ .

1. Déterminer
  - a.  $D_1 = P_1 \cap (xOy)$  ;
  - b.  $D_2 = P_2 \cap (xOy)$ .  
(on pourra faire une figure dans le plan  $xOy$ ).
2. Déterminer, dans le plan  $xOy$  muni du repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  une mesure de l'angle  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  où  $\vec{u}_1$  (resp.  $\vec{u}_2$ ) est un vecteur directeur de  $D_1$  (resp.  $D_2$ ).  
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de

$$f = s_{P_2} \circ s_{P_1}$$

PROBLÈME

12 points

*Les parties A et B sont indépendantes*

On se propose, dans ce problème, de résoudre des équations du 3<sup>e</sup> degré, de la forme

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0.$$

Partie A

On donne  $a = 5,45$ ,  $b = -4,84$ . L'équation correspondante est notée  $(E_1)$ .

1. Étudier les variations de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^3 + 5,45x^2 - 4,84x + 1.$$

En déduire que  $(E_1)$  admet une solution négative notée  $x_1$  et une solution double positive notée  $x_2$ .

2. Donner les valeurs exactes de  $x_1$  et  $x_2$ .
3. Le plan est rapporté à un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  avec pour unité de longueur le centimètre et  $\|\vec{i}\| = 1, \|\vec{j}\| = 0,25$ .
- Construire la courbe représentative  $\mathcal{C}_1$  de  $f$ .
  - Calculer l'aire en  $\text{cm}^2$  du domaine plan, ensemble des points  $M(x; y)$  tels que :

$$\begin{cases} x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

On donnera le résultat en  $\text{cm}^2$  au  $\text{mm}^2$  près par défaut.

### Partie B

On donne  $a = -1, b = 3$ . L'équation correspondante est notée  $(E_2)$ .

- Démontrer que  $(E_2)$  a une solution réelle unique notée  $\alpha$ .
- On pose  $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$ .  
A l'aide de votre calculatrice, déterminer l'entier relatif  $k$  tel que

$$\frac{k}{10} < \alpha < \frac{k+1}{10}$$

- Démontrer que  $g(x) = 0$  équivaut à  $x = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$ .

Étudier la fonction  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$ .

Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

- On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la suite  $(u_n)$  par

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & h(u_n) \end{cases}$$

- Calculer  $u_1, u_2$  et  $u_3$  et classer  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$  dans l'ordre croissant.
- Démontrer que si  $(u_n)$  converge, sa limite est solution de  $(E_2)$ .
- Démontrer que pour tout entier naturel  $n, -\frac{1}{3} \leq u_n \leq 0$ .
- Pour tout  $p$  élément de  $\mathbb{N}$  on pose

$$\begin{aligned} v_p & = & u_{2p} \\ w_p & = & u_{2p+1} \end{aligned}$$

Sachant que  $h$  est décroissante sur  $\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$ , donner le sens de variation de  $h \circ h$  sur cet intervalle.

En déduire que  $(v_p)$  est décroissante et  $(w_p)$  croissante.

- Prouver que pour  $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0, |h'(x)| \leq \frac{8}{27}$ .

En déduire que  $|w_{p+1} - v_{p+1}| \leq \left(\frac{8}{27}\right)^2 |w_p - v_p|$ . En conclure que la suite  $(u_n)$  converge.

- Calculer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près (on mettra en évidence la méthode choisie).