Baccalauréat C Antilles–Guyane juin 1988

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Expliciter, sous forme trigonométrique, les trois racines de chacune des deux équations :
   a. $u^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$;
   b. $u^3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.
2. Établir, pour tout réel α, l'égalité :
$$1 + e^{\alpha} = 2e^{i\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2}.$$
3. Résoudre l'équation :
$$(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$$
   (on pourra poser $(z-1)^3 = v$).

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère deux points fixes distincts A et B de l'espace $\mathscr{E}$ et deux réels fixes a et b.

1. M étant un point quelconque de $\mathscr{E}$, quelle condition a et b doivent-ils vérifier pour que le barycentre M′ des points pondérés (A, a), (B, b), (M, 1) soit défini ?
   Dans toute la suite de l'exercice, on suppose cette condition vérifiée et on note f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à M fait correspondre M′.
2. On suppose dans cette question $a + b = 0$. Exprimer
   $\overrightarrow{\text{AM}'}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{AM}}$. En déduire la nature géométrique de f.
3. On suppose dans cette question $a + b \neq 0$.
   a. Montrer que f admet un unique point invariant I que l'on précisera.
   b. Exprimer $\overrightarrow{\text{IM}'}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{IM}}$ et en déduire la nature géométrique de f.

PROBLÈME **12 POINTS**

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y' - \frac{1}{n}y = 0 \qquad (1)$$
2. On considère l'équation différentielle
$$y - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n}(n+1) \qquad (2)$$
   Déterminer deux réels a et b tels que la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de (2).

3. a. Montrer que, pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ soit solution de (2), il faut et il suffit que $h - g$ soit solution de (1).
   b. En déduire toutes les solutions de (2).
   c. Déterminer celle de ces solutions, f, vérifiant $f(0) = 0$.

Partie B

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - \mathrm{e}^{\frac{x}{n}}.$$

1. Étudier le signe de f_n'. En déduire le tableau de variations de f_n.
   On montrera en particulier que f_n admet un maximum strictement positif que l'on calculera.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_n$ représentant f_n admet une asymptote dont on précisera l'équation. Tracer $\mathscr{C}_2$.
3. Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet une racine unique que l'on notera x_n.

Partie C

On se propose dans cette partie de montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ admet une limite ℓ et de calculer ℓ. À cet effet on cherche à réaliser un encadrement de x_n.

1. On considère la fonction φ définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par

$$\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln\frac{x-1}{x+1}.$$

   a. Déterminer le signe de φ'. En déduire le signe de φ.
   b. Montrer que $\varphi(n) < 0$ puis que $f_n(-2) < 0$.
   c. En déduire que $x_n > -2$.

2. a. Établir l'égalité

$$f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}\left[\frac{2n+1}{2n(n+1)} + \ln\frac{n}{n+1}\right].$$

   b. On considère la fonction Ψ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$\Psi(x) = \frac{2x+1}{2x(x+1)} + \ln\frac{x}{x+1}.$$

   Étudier le signe de Ψ'. En déduire le signe de Ψ, puis celui de

$$f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right).$$

   c. Montrer que $x_n < 2n\ln\dfrac{n}{n+1}$.

3. a. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right)$. On pourra poser $u = \dfrac{1}{n}$.
   b. En déduire l'existence et la valeur de ℓ.