Baccalauréat C Lille juin 1988

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On donne dans le plan un point O et une droite (Δ) ne passant pas par O.
On se propose de donner une construction de l'intersection d'une droite (D) passant par O et non perpendiculaire à (Δ) avec l'ellipse (E) d'excentricité $\frac{1}{2}$, de foyer O et de directrice associée (Δ).
On note $\overrightarrow{i}$ un vecteur unitaire orthogonal à (Δ) et $\overrightarrow{j}$ un vecteur unitaire de (D).

1. Pour tout point M de (D), on définit deux points H et H' tels que $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{MH'}$ soient orthogonaux à (Δ) et de norme égale à $2.MO$.
   Montrer que lorsque M décrit (D), H et H' décrivent deux droites (D_1) et (D_2) passant par O, dont on précisera un vecteur directeur en fonction de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
2. L'une des deux droites (D_1) et (D_2) peut-elle être parallèle à (Δ) ?
3. Utiliser les questions précédentes pour construire l'intersection de l'ellipse (E) et de la droite (D).
   Faire une figure soignée dans laquelle on prendra 4 cm pour la distance de O à (Δ) et $\frac{\pi}{2}$ pour mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Il n'est pas demandé de construire l'ellipse (E).

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère dans le plan (P) orienté le losange $AIBI'$.
Soit r la rotation de centre A qui transforme I en I'.
Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des points M du plan tels que M, B et l'image M' de M par r soient sur une même droite.

1. Soit C le point dont l'image par r est B. Démontrer que C est sur le cercle de centre I et de rayon IA.
2. En supposant M distinct de B et de C, démontrer que M, B et M' sont alignés si, et seulement si,

$$(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) \mod \pi.$$

3. En déduire l'ensemble des points M tels que M, B et M' soient sur une même droite.

PROBLÈME **12 POINTS**

On désigne par f_λ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = 1 - \text{e}^{-\lambda x},$$

où λ est un réel strictement positif donné.
On note (C_λ) la courbe représentative de la fonction f_λ dans un plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
On définit enfin la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f_\lambda(u_n).$$

A)
Dans cette partie on se propose d'étudier la famille des fonctions f_λ et la famille de courbes (C_λ).

1. Étudier le sens de variations de la fonction f_λ et préciser les limites de f_λ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. **a.** Vérifier que la courbe (C_λ) passe par l'origine O et écrire une équation de la tangente en O à (C_λ).

   b. Soit M un point quelconque du plan, H son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées $(y'y)$ et M' le point défini par la relation $\overrightarrow{HM} = \lambda\overrightarrow{HM'}$.
   Démontrer que M appartient à la courbe (C_1) si et seulement si M' appartient à (C_λ).

   c. Construire avec soin la courbe (C_1), en prenant 2 cm comme unité, puis la courbe (C_2) en appliquant le résultat du b.
3. On envisage ici l'étude de l'intersection de la courbe (C_λ) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$.
   Pour cela, on pose g_λ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x.$$

   a. Dresser le tableau de variations de g_λ, en précisant les limites aux bornes.
   Démontrer que g_λ admet un maximum absolu $m(\lambda)$; exprimer en fonction de λ la valeur de x telle que $g_\lambda(x) = m(\lambda)$ et démontrer que

$$m(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln\lambda}{\lambda}.$$

   b. En remarquant que $g_\lambda(0) = 0$, établir que $m(\lambda)$ est strictement positif si λ est différent de 1.

   c. Déduire des questions précédentes le nombre de solutions réelles de l'équation $g_\lambda(x) = 0$ et leur signe (on discutera suivant la position de λ par rapport à 1).
   Conclure quant à l'intersection de (C_λ) et de (Δ).

B. Dans cette partie, on fixe $\lambda = 2$ et on note x_2 l'unique solution strictement positive de l'équation $g_2(x) = 0$ étudiée dans la partie A.
On se propose la recherche des valeurs approchées de x_2 à l'aide de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans le préambule avec $\lambda = 2$.

1. Déterminer le signe de $g_2(1)$ et celui de $g_2(\ln 2)$. En déduire l'encadrement :

$$\ln 2 \leqslant x_2 \leqslant 1.$$

2. Démontrer par récurrence sur n, en utilisant les variations de f_2, que pour tout entier naturel n, on a :

$$x_2 \leqslant u_n \leq 1.$$

3. Calculer $f_2'(\ln 2)$ et démontrer que, si x est supérieur ou égal à $\ln 2$, alors :

$$0 \leq f_2'(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - x_2 \leqslant \frac{(}{u\,n} - x_2).$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'inégalité :

$$u_n - x_2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Prouver alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_2.

Application numérique : déduire de l'étude précédente une valeur approchée décimale à 10^{-2} près de x_2.

C. Dans cette partie, on fixe $\lambda = 1$ et on se propose d'étudier dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans le préambule.
On pourra utiliser le résultat suivant : $g_1(x)$ est strictement négatif pour tout réel x non nul.

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, tous les termes de u_n sont strictement positifs et étudier le sens des variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que cette suite est convergente et calculer sa limite.
2. **a.** Pour tout réel x positif, démontrer que $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ et en déduire que :

$$f_1(x) \geqslant \frac{x}{x+1}.$$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} \geqslant \frac{u_n}{u_n+1} \qquad \text{et que} \qquad \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}.$$

c. Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$