# ꧁ Baccalauréat C novembre 1988 ꧂
# Nouvelle-Calédonie

**EXERCICE 1**

L'espace $(\mathscr{E})$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère le plan (P) d'équation $3x+4z-5=0$ et l'ensemble $(\Gamma)$ des points du plan $(x\text{O}y)$ équidistants du plan (P) et de l'origine.

1. Calculer la distance au plan (P) d'un point $\text{M}_0$ de $(\mathscr{E})$ de coordonnées $\left(x_0~;~y_0~;~z_0\right)$.
   En déduire que $(\Gamma)$ admet une équation dans $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$
   $$x^2+y^2=\left(\frac{3x-5}{5}\right)^2.$$
2. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et $(x\text{O}y)$. Montrer que $(\Gamma)$ est une conique de foyer O et de directrice associée (D). Déterminer son excentricité.
3. Préciser la nature de $(\Gamma)$, les sommets de l'axe focal, le centre et les autres sommets. On donnera les coordonnées de ces points dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan $(x\text{O}y)$.
   Représenter $(\Gamma)$ dans ce même repère.

**EXERCICE 2**

On considère le triangle équilatéral ABC dans l'espace $(\mathscr{E})$.
Soient :

- O le centre de gravité du triangle ABC ;
- I un point extérieur au plan (ABC), équidistant de A, B et C ;
- J le symétrique de I par rapport au plan (ABC).

On suppose l'espace orienté et le plan (ABC) orienté de telle sorte que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$ soit de sens direct.
On se propose de déterminer l'ensemble $(\mathscr{R})$ des réflexions de l'espace qui transforment l'ensemble {A, B, C} en lui-même.

1. Soit $S$ un élément de $(\mathscr{R})$. On note P le plan de $S$.
   a. Montrer que P passe nécessairement par O.
   b. Montrer que I a pour image I ou J par S. Que peut-on en déduire pour P ?
   c. On se place dans le cas où $S(\text{I}) = \text{I}$. Déterminer alors le plan P en considérant les différentes possibilités pour l'image de A.
2. En déduire l'ensemble $(\mathscr{R})$.
3. Déterminer l'ensemble obtenu en composant 2 à 2 les éléments de $(\mathscr{R})$. Combien de transformations distinctes trouve-t-on ainsi ? Préciser les demi-tours obtenus.

**PROBLÈME (extrait)**

L'objet de ce problème est l'étude d'une fonction $f$ et la recherche d'une valeur approchée de la solution $x_0$ de l'équation $f(x)=0$.

**Partie I**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par
$$f(x)=\frac{1}{x}-\ln x.$$

1. **a.** Étudier le sens de variation de $f$ et déterminer les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.

   **b.** Tracer la courbe représentative $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de $f$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (on prendra 2 cm pour unité).

   **c.** Déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand $x$ tend vers $+\infty$. La branche infinie correspondante de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ a-t-elle une asymptote ?

2. **a.** Démontrer l'existence et l'unité de la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $]0\,;\,+\infty[$. On note $x_0$ cette solution.

   **b.** Montrer que $1 < x_0 < 2$.

3. Soit $(\mathscr{D})$ la tangente à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point d'abscisse 1.

   **a.** Déterminer une équation de $(\mathscr{D})$ de la forme $y = \alpha x + \beta$.
   Calculer l'abscisse $x_1$ du point d'intersection de $(\mathscr{D})$ avec l'axe des abscisses. Tracer $(\mathscr{D})$ sur la figure précédente.

   **b.** Étudier le sens de variation de la fonction $\varphi$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

   $$\varphi(x) = f(x) - \alpha x - \beta.$$

   En déduire le signe de $\varphi$ et les positions relatives de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et de $(\mathscr{D})$.

   **c.** Comparer $x_0$ et $x_1$.

4. Pour tout $x$ de $]0\,;\,+\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

   **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $F(x)$.
   En déduire que la valeur en cm$^2$ de l'aire de la partie du plan délimitée par $\left(\mathscr{C}_f\right)$, l'axe des abscisses, et la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = x_0$, est égale à $\dfrac{4\,(x_0-1)^2}{x_0}$.

**Partie II**

On se propose de déterminer une valeur approchée de $x_0$.
Soit $g$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. **a.** Montrer que $g\,(x_0) = x_0$.

   **b.** Déterminer le sens de variation de $g$.

   **c.** Montrer que $\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2$ implique $\dfrac{3}{2} \leqslant g(x) \leqslant 2$.

2. Il résulte de l'étude précédente que l'on peut définir une suite $(U_n)$ d'éléments de $\left[\dfrac{3}{2}\,;\,2\right]$, en posant $U_0 = \dfrac{3}{2}$ et $U_{n+1} = g\,(U_n)$ pour tout entier naturel $n$.

   **a.** Montrer que $\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2$ entraîne $\left|g'(x)\right| \leqslant 0,9$.

   **b.** En déduire pour tout entier naturel $n$,

   $$|U_{n+1} - x_0| \leqslant (0,9)\,|U_n - x_0|.$$

   **c.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$,

   $$|U_n - x_0| \leqslant (0,9)\,|U_0 - x_0|.$$

   **d.** En déduire que la suite $(U_n)$ converge vers $x_0$.

3. **a.** À l'aide du sens de variation de $g$, montrer que $x_0$ est compris entre $U_n$ et $U_{n+1}$.

   **b.** Calculer $U_n$ pour $n \leqslant 5$ et en déduire un encadrement de $x_0$.