Durée : 4 heures

Baccalauréat C Pondichéry avril 1988

EXERCICE 1 **5 points**

1. Soit P le polynôme de la variable complexe z défini par

$$P(z) = z^3 - (3+4\mathrm{i})z^2 - 3(1-4\mathrm{i})z + 9.$$

   a. Calculer $P(3)$.

   b. Montrer que $P(z)$ peut se mettre sous la forme $(z-3)Q(z)$ où Q est un polynôme que l'on déterminera.

   c. On pose $z = Z + 2\mathrm{i}$ et $Q(z) = Q_1(Z)$.
   Déterminer le polynôme Q_1 puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q_1(Z) = 0$.

   d. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2. On note z_1, z_2, z_3 ces solutions de façon que :

$$\mathrm{Im}(z_1) < \mathrm{Im}(z_2) < \mathrm{Im}(z_3)\,;$$

   on désigne par B, C, D leurs images respectives dans le plan complexe. On considère en outre le point A d'affixe $z_0 = 2 - \mathrm{i}$.

   a. Placer les points A, B, C et D sur une figure.

   b. Soit S la similitude directe plane qui transforme A en C et B en D. Donner, sous forme complexe, l'expression de cette similitude. Préciser le centre I, le rapport et l'angle de S.

   c. Déterminer les images par S des points C et D.

3. Soit $H = S \circ S \circ S \circ S$ la composée de quatre similitudes identiques à S.
   Préciser la nature de H et ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2 **6 points**

Soit (P) une parabole de foyer F et de directrice (D).

1. On choisit un repère orthonormé (Ox, Oy) tel que F ait pour coordonnées $(2\,;\,0)$ et (D) pour équation $x = -2$.
   (Pour faire la figure on choisira une unité mesurant deux centimètres.)
   Écrire une équation cartésienne de la parabole (P).

2. Soit m un réel donné et T le point de la parabole (P) d'ordonnée m et d'abscisse x.

   a. Exprimer x en fonction de m.

   b. Donner une équation de la tangente à (P) en T en fonction de m.

   c. Montrer que, si T et T$'$ sont des points distincts de (P) d'ordonnées respectives m et m', les tangentes à (P) en T et T$'$ sont sécantes ; soit I leur point d'intersection ; déterminer les coordonnées de I en fonction de m et m'.

3. m décrivant $\mathbb{R}$,

   a. Quel est l'ensemble des points I tels que les tangentes à (P), (IT) et (IT$'$) soient orthogonales ?

b. Montrer que si (IT) et (IT$'$) sont orthogonales,
F appartient à la droite (TT$'$), (IF) est orthogonale à (TT$'$)
et que, K et K$'$ étant les projections orthogonales de T et T$'$ sur la droite (D), IK = IK$'$ = IF.
En déduire que K et F sont symétriques par rapport à la droite (IT).

PROBLÈME **9 points**

1. On se propose de résoudre l'équation différentielle :

$$y' + y = x + 1 \qquad \text{(E)},$$

y étant une fonction réelle de la variable réelle x et y' sa dérivée.

a. On pose $z = y - x$; écrire l'équation différentielle (F) satisfaite par z.

b. Résoudre (F), puis (E).

c. Trouver la solution de (E) qui prend la valeur 1 pour $x = 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

a. Étudier les variations de f

b. En vue de construire la courbe ($\mathscr{C}$) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé dont l'unité mesure 2 centimètres :

- Montrer que ($\mathscr{C}$) possède une asymptote (x tendant vers $+\infty$) en donner une équation et préciser la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à cette asymptote.
- Construire les points de ($\mathscr{C}$) d'abscisses -1 et 0 et les tangentes à ($\mathscr{C}$) en ces points.

c. Tracer la courbe ($\mathscr{C}$).

3. On désigne par $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par ($\mathscr{C}$) et par les droites d'équations : $y = x$, $x = 0$ et $x = \lambda$ où λ est un paramètre réel positif.

a. Calculer $\mathscr{A}(\lambda)$.

b. L'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ tend-elle vers une limite quand λ tend vers l'infini ? Si oui, laquelle ?

4. On revient à l'équation différentielle (E) de la première question et on appelle y_α la solution de (E) telle que $y_\alpha(0) = \alpha$ et ($\mathscr{C}_\alpha$) la courbe représentative de y_α où α est un paramètre réel donné.

a. Étudier les variations de y_α et donner l'allure de ($\mathscr{C}_\alpha$) dans les trois cas :

$$\alpha < 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha > 0.$$

b. Montrer que, pour tout α, la tangente à ($\mathscr{C}_\alpha$) au point d'abscisse -1 passe par l'origine des axes.

c. Plus généralement, montrer que toutes les tangentes aux courbes ($\mathscr{C}_\alpha$) en un point d'abscisse x_0 donnée se coupent sur ($\mathscr{C}_\alpha$).