

∞ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1989 ∞

EXERCICE 1

6 POINTS

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ direct.

Soit B un point de la droite de repère $(O; \vec{i})$ et C un point de la droite de repère $(O; \vec{k})$.

La droite Δ a pour repère $(B; \vec{i})$.

La droite D a pour repère $(C; \vec{j})$.

1. Montrer qu'il existe une droite L orthogonale à Δ et à D, coupant Δ en B et D en un point A.
2.
 - a. Soit P le plan médiateur de [A, B] Quelle est l'image de D dans la réflexion par rapport à P?
 - b. Dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) déterminer deux droites D'_1 et D'_2 telles que la droite (OB) ait pour image la droite Δ dans les réflexions d'axes D'_1 et D'_2 . En déduire qu'il existe deux plans P'_1 et P'_2 tels que la droite (OB) ait pour image la droite Δ dans les réflexions par rapport à P'_1 et P'_2 .
 - c. En déduire qu'il existe deux rotations de l'espace, R_1 et R_2 transformant D en Δ . Déterminer un repère de chacun des axes de ces rotations. Quel est l'angle de ces rotations?

EXERCICE 2

5 POINTS

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln \left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right).$$

1. Étudier le sens de variations de f .
2.
 - a. Chercher la limite en $-\infty$ de f .
 - b. Démontrer que :

$$f(x) = x + \ln 2 + \ln \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}.$$

En déduire la limite en $+\infty$ de f .

3. Montrer que la représentation graphique \mathcal{C} de f dans un plan rapporté au repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 3 cm) admet la droite d'équation $y = x + \ln 2$ pour asymptote. Vérifier que le point d'intersection des asymptotes appartient à \mathcal{C} . Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à chacune des deux asymptotes. Déterminer la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. Tracer la courbe \mathcal{C} .

PROBLÈME

9 POINTS

On se propose l'étude pour n entier naturel non nul, des fonctions f_n définies sur $[0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f_n(x) &= x e^{-\frac{1}{nx}} & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) &= 0. \end{cases}$$

1. Étude des variations de f_n pour n entier naturel non nul.
 - a. Prouver que la fonction f_n est continue sur $[0; +\infty[$.
 - b. Étudier la dérivabilité de f_n en 0.
 - c. Calculer $f'_n(x)$ pour $x > 0$ et justifier que f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2. Étude au voisinage de $+\infty$
 - a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
 - b. Donner le tableau de variations de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(u) = e^{-u} - (1 - u).$$

En déduire que pour tout nombre réel $u \geq 0$

$$0 \leq 1 - e^{-u} \leq u \quad (1)$$

- c. Soit $t \geq 0$.
En intégrant sur l'intervalle $[0; t]$ l'encadrement (1), en déduire que pour tout nombre réel $t \geq 0$

$$0 \leq e^{-t} - (1 - t) \leq \frac{t^2}{2}. \quad (2)$$

- d. Démontrer grâce à (2) que pour tout nombre réel $x > 0$

$$0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2 x}$$

En déduire que la droite D_n d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_n représentative de f_n .

Préciser la position relative de \mathcal{C}_n et D_n .

3. Tracé de courbes.
 - a. Donner le tableau de variations de f_n .
 - b. Tracer la courbe \mathcal{C}_1 et son asymptote en précisant la tangente en 0.
 - c. Démontrer que, pour tout $n > 0$, \mathcal{C}_n est l'image de \mathcal{C}_1 par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$.
Construire \mathcal{C}_2 sur le même graphique que \mathcal{C}_1 .