

∞ Baccalauréat C Antilles–Guyane juin 1989 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

1. a. Étudier les variations de la fonction f , définie pour tout x réel de l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$, par :

$$f(x) = 2\ln(x + 1)$$

et tracer sa courbe représentative \mathcal{C} dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) unité : 2 cm.

- b. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$$2\ln(x + 1) = x.$$

On notera λ la solution non nulle de cette équation.

Déterminer graphiquement une valeur approchée de λ à 10^{-1} près.

2. On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 2\ln(u_n + 1).$$

. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite à l'aide de \mathcal{C} et de la droite d'équation $y = x$.

3. a. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[2 ; +\infty[$, on a :

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{3}.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a :

$$|u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{2}{3} |u_n - \lambda| \quad \text{puis} \quad |u_n - \lambda| \leq 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

et que la suite converge vers λ .

EXERCICE 2

4 POINTS

1. a. Montrer que, pour tout réel x , on a :

$$\frac{1}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

- b. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(e^x + 1)^2} dx.$$

2. a. Déterminer une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{e^x}{(e^x + 1)^3}.$$

- b. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x + 1)^3} dx.$$

PROBLÈME**12 POINTS**

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . On prendra comme unité de longueur 5 cm.

Soit f l'application de P dans P qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1}{2}(3z - z^3).$$

A. Étude de quelques propriétés de f

1. Déterminer l'ensemble des points invariants de P par f .
2. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que O , M et M' sont alignés.
3. Soient M et N deux points de P d'images respectives M' et N' par f . Que peut-on dire de M' et N' lorsque :
 - a. M et N sont symétriques par rapport à la droite $(O; \vec{i})$?
 - b. M et N sont symétriques par rapport à O ?

B. Image par f du cercle de centre O et de rayon 1

On désigne ce cercle par C et par C' son image par f . Soit C_1 la partie de C située dans le premier quadrant, c'est-à-dire l'ensemble des points de C ayant une abscisse et une ordonnée positives.

1. Soit C'_1 l'image de C_1 par f . Comment peut-on obtenir C' à partir de C'_1 ?
2. Soit M d'affixe $z = e^{i\alpha}$ un point de C_1 ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) et M' l'image de M par f .
Déterminer l'affixe de l'image Ω_M du point M dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$.
Montrer que M' est l'image de M dans la rotation de centre Ω_M et d'angle 2α .
Faire la figure dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
3. Soit Γ_M le cercle de centre Ω_M et de rayon $\frac{1}{2}$.
Montrer que C et Γ_M sont tangents au point M et que M' appartient à Γ_M .
4. On suppose dans cette question que α est différent de 0 et $\frac{\pi}{2}$.
On note M'' le point diamétralement opposé à M sur Γ_M .
 - a. Montrer que M'' est différent de M' .
 - b. On appelle J le point d'intersection des droites $(O; \vec{i})$ et $(M'M'')$. Montrer que le triangle $OM''J$ est isocèle. En déduire que la droite (JM) est la tangente commune aux deux cercles.
 - c. Montrer que 2α est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{M'M''})$.
5. a. Montrer que les coordonnées x' et y' de M' , image par f du point M de C_1 d'affixe $z = e^{i\alpha}$ sont données, en fonction de α , par :

$$\begin{cases} x' = u(\alpha) = \frac{1}{2}(3\cos\alpha - \cos 3\alpha) \\ y' = v(\alpha) = \frac{1}{2}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha) \end{cases} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

- b.** On suppose α différent de 0. Soit T la tangente à C'_1 au point M' . Montrer que T admet pour vecteur directeur le vecteur $\cos 2\alpha \vec{i} + \sin 2\alpha \vec{j}$.

On rappelle que :

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

- c.** En déduire que, pour α différent de 0 et $\frac{\pi}{2}$, T est la droite $(M'M'')$.
Que peut-on dire de la tangente à C'_1 au point correspondant à $\alpha = \frac{\pi}{2}$?
- d.** On admet que le résultat démontré au 5. b. est encore valable.
Que peut-on dire de la tangente à C'_1 au point correspondant à $\alpha = 0$?
- e.** Déduire de ce qui précède une construction de M' et de T connaissant M .
Sur une nouvelle figure, construire les points M' correspondants aux valeurs suivantes de α : $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et tracer les tangentes à C'_1 correspondantes.
- 6.** Étudier les variations des fonctions u et v sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, rassembler les résultats obtenus dans un même tableau et terminer la construction de C'_1 puis celle de C' .