∽ Baccalauréat C international juin 1989 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ et tout point M de coordonnées $(x, ; y)$ est repéré par son affixe $z = x + \text{i}y$.
On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives -1 ; 1 ; $\dfrac{1}{2}$ et 2.
À tout point m du plan d'affixe z, $z \neq 2$, on associe le point M d'affixe Z tel que :

$$Z = \frac{2z-1}{2-z}.$$

1. Déterminer l'ensemble E des points m d'affixes z tels que $|Z| = 1$.
2. Déterminer l'ensemble F des points m d'affixe z tels que $\arg Z = \dfrac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.
3. Tracer les ensembles E et F dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.
4. Exprimer, en fonction de z, le complexe $U = \dfrac{Z-1}{Z+1}$.
   En déduire que les quatre points A, B, m, M sont cocycliques ou alignés.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan orienté, ABCD et AEFG sont deux carrés tels que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{\text{AE}}, \overrightarrow{\text{AG}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
On désigne par M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [BD], DE], [EG], [GB].

1. Montrer que MNPQ est un parallélogramme .
2. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   Déterminer l'image du segment [BE] par cette rotation R.
   En déduire que MNPQ est un carré.
3. On désigne par l et m les longueurs respectives des côtés des carrés ABCD et AEFG. On pose $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right) = \alpha$, $\alpha \in [0 ; 2\pi[$.
   a. Exprimer, en fonction de l, m et α, la longueur des côtés du carré MNPQ.
   b. Déterminer α pour que l'aire du carré MNPQ soit maximale.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

L'objet de cette partie est l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \text{e}^{-x} \ln\left(1 + \text{e}^{x}\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal

1. On considère la fonction φ définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\varphi(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

   a. Déterminer la dérivée φ' de la fonction φ.

b. Donner le sens de variation de φ puis le signe de φ.

2. Soit f' la dérivée de la fonction f.

a. Montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right].$$

b. En utilisant le 1., étudier le sens de variation de la fonction f.

3. a. Montrer que, pour tout réel x,

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right).$$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
$\left(\text{On rappelle que } \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1.\right)$

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B

L'objet de cette deuxième partie est l'étude d'une suite définie à partir de f.
Les calculs seront effectués à la calculatrice.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution notée α. Montrer que $0,5 \leqslant \alpha \leqslant 0,6$.

2. Démontrer que pour tout réel x tel que $0,5 \leqslant x \leqslant 0,6$, on a les deux encadrements :

$$0,5 \leqslant f(x) \leqslant 0,6 \quad \text{et} \quad -0,25 \leqslant f'(x) \leqslant 0$$

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,5 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

a. Démontrer que, pour tout nombre entier n,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,25|u_n - \alpha|$$

puis $|u_n - \alpha| \leqslant (0,25)^n \times 0,1$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

b. Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout entier n supérieur à n_0,
$|u_n - \alpha| \leqslant 5\cdot 10^{-4}$.

Partie C

L'objet de cette partie est l'étude d'une primitive de f.

1. Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) + f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

2. Soit x un réel positif. En utilisant la question précédente calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Interpréter graphiquement $I(x)$. Déterminer la limite de $I(x)$ quand x tend vers $+\infty$.