Baccalauréat C Espagne juin 1989

EXERCICE 1 **5 POINTS**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en Z :

$$Z^2 + \left(1 - \sqrt{3}\right) Z - \sqrt{3} = 0.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations en z :

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & z + \dfrac{1}{z} & = & -1 \\
(2) & z + \dfrac{1}{z} & = & \sqrt{3}
\end{array}$$

On désigne par α et α' les solutions de l'équation (1), par β et β' celles de l'équation (2).

3. Soit

$$f(z) = z^4 + \left(1 - \sqrt{3}\right) z^3 + \left(2 - \sqrt{3}\right) z^2 + \left(1 - \sqrt{3}\right) z + 1.$$

Vérifier que pour tout nombre complexe z non nul,

$$\frac{f(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{3}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) - \sqrt{3}.$$

4. Déduire de l'étude précédente que α, α', β, β' sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit ABC un triangle équilatéral du plan. On pose AB $= a$, où a est un réel strictement positif; l'unité du plan étant le centimètre, on prendra $a = 6$ pour la figure demandée au 3.

1. Soit m un réel différent de -2. On note G_m le barycentre du système $\{(A,\ m),\ (B,\ 1),\ (C,\ 1)\}$.
Déterminer l'ensemble (E_1) des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$ en restant différent de -2.

2. On note G l'isobarycentre des trois points A, B, C.

a. Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2.$$

b. Déterminer l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0.$$

3. Faire une figure où l'on représentera le triangle ABC et les ensembles (E_1), (E_2) et (E_3).

PROBLÈME **4 POINTS**

A

On note f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\cos x}.$$

1. Étudier la parité et la périodicité de f.
Construire son tableau de variations sur l'intervalle $[0~;~\pi]$.
Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la restriction de f à $[0~;~\pi]$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ où l'unité de longueur est 5 cm.

2. On se propose de rechercher un encadrement de l'aire S, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.

a. Étant donnés deux nombres réels u et v tels que $0 \leqslant u \leqslant v \leqslant \pi$, démontrer que l'on a

$$(v-u)f(u) \leqslant \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (v-u)f(v)$$

et interpréter géométriquement ce résultat.

b. En utilisant le résultat précédent, établir l'encadrement suivant du nombre S :

$$\frac{\pi}{4}\left[f(0)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] \leqslant \mathrm{S}$$
$$\leqslant \frac{\pi}{4}\left[f(0)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\pi}{4}\right)+f(\pi)\right]$$

c. En déduire une valeur approchée entière, à une unité près, du nombre S.

3. On se propose de rechercher les tangentes à $(\mathscr{C})$ issues de l'origine O.

a. Soit A le point de $(\mathscr{C})$ ayant pour abscisse a. Écrire une équation de la tangente en A à $(\mathscr{C})$ et montrer que cette tangente passe par O si, et seulement si, $a \sin a = 1$.

b. On définit la fonction numérique Ψ sur $]0~;~\pi]$ par

$$\Psi(x) = \sin x - \frac{1}{x}.$$

Étudier les variations de Ψ (on pourra étudier les variations de Ψ' pour connaître le signe de Ψ').
En déduire l'existence pour la fonction Ψ d'un maximum absolu M en un point x_0 (on ne cherchera à calculer ni x_0, ni M).
Calculer $\Psi'(\pi/2)$ et $\Psi(\pi/2)$; en déduire la position de x_0 par rapport à $\pi/2$ et le signe de M.
Montrer alors que Ψ s'annule en deux points p et q de $]0~;~\pi]$ et donner, en la justifiant, une valeur décimale approchée par défaut, à 10^{-1} près, de chacune de ces racines p et q.

c. En utilisant les résultats précédents, conclure quant au nombre de tangentes à $(\mathscr{C})$ que l'on peut mener à partir de O.

B

On définit une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\cos n}$$

et, pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

1. Établir que pour tout entier naturel non nul n, on a l'encadrement

$$\frac{1}{n\text{e}} \leqslant u_n \leqslant \frac{\text{e}}{n}.$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.

2. **a.** En utilisant le fait que pour tout x élément de l'intervalle $[n\ ;\ n+1]$ on a $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{n}$ (n entier naturel non nul), démontrer que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\text{d}x \leqslant \frac{1}{n}.$$

En déduire l'inégalité $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

b. On pose

$$\Sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

En utilisant le résultat précédent, établir que

$$\lim_{n \to +\infty} \Sigma_n = +\infty.$$

c. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

(On pourra utiliser l'encadrement obtenu au B. 1.)