# ∽ Baccalauréat C groupe 3 [1] juin 1989 ∾

**EXERCICE 1** **4 POINTS**

Le plan complexe $(\mathscr{P})$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On notera A le point d'affixe $-1+2\text{i}$ et B le point d'affixe $2-\text{i}$.

1. Déterminer et représenter dans le plan $(\mathscr{P})$ l'ensemble $(\text{E}_1)$ des points $M$ de $(\mathscr{P})$ d'affixe $z = x + \text{i}y$ tels que :

$$z^2 - (1-2\text{i})^2 = \overline{z}^2 - (1+2\text{i})^2$$

   où $\overline{z}$ désigne le conjugué de $z$.
   Vérifier que A et B appartiennent à $(\text{E}_1)$.

2. Déterminer et représenter dans le plan $(\mathscr{P})$ l'ensemble $(\text{E}_2)$ des points $M$ de $(\mathscr{P})$ d'affixe $z = x + \text{i}y$ tels que :

$$[z - (1+\text{i})]\left[\overline{z} - (1-\text{i})\right] = 5.$$

   Vérifier que A et B appartiennent à $(\text{E}_2)$.

**EXERCICE 2** **4 POINTS**

Soit ABC un triangle isocèle du plan tel que AB = AC. On note I le milieu de [BC] et on donne $\text{AI} = 4a$ et $\text{BC} = 2a$, où $a$ est un réel strictement positif ; l'unité de longueur dans le plan étant le centimètre, on prendra $a = 2$ pour la figure demandée au 1.
On note G le barycentre du système $\{(\text{A}, 2), (\text{B}, 1), (\text{C}, 1)\}$.

1. En utilisant le point G, déterminer l'ensemble (E) des points $M$ du plan tels que

$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right\|.$$

   Faire une figure où l'on représentera le triangle ABC et l'ensemble (E).

2. $k$ étant un nombre réel déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que $2M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = ka^2$.
   On discutera suivant les valeurs de $k$.

**PROBLÈME** **12 POINTS**

## A

On considère dans le plan $(\mathscr{P})$ rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, le cercle $(\Gamma)$ de centre O et de rayon 1. Soit A le point de cordonnées (1 ; 0) et A′ le point de coordonnées (−1 ; 0).

1. Par tout point H du segment [AA′], distinct de A et de A′, on mène la perpendiculaire (A) à la droite (AA′). La droite $(\Delta)$ coupe le cercle $(\Gamma)$ en M et M′. On pose $\text{OH} = x$. Calculer en fonction de $x$ l'aire du triangle AMM′.

1. Lille, Amiens, Rouen

2. Soit $f$ la fonction numérique définie sur $[-1\,;\,+1]$ par

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal où l'unité de longueur est 4 cm.

   **a.** Étudier la dérivabilité de $f$ en $-1$ et $+1$. En déduire les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisses $-1$ et $+1$.

   **b.** Dresser le tableau de variations de $f$ ; on y précisera $f(0)$.

   **c.** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

3. Montrer que le triangle AMM$'$ d'aire maximale est équilatéral.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions $\alpha$ et $\beta$ $(a < \beta)$. Déterminer $\beta$ et donner, en justifiant, une valeur décimale approchée par défaut à $10^{-3}$ près de $\alpha$.

**B**

Cette partie propose l'étude des intégrales $I_n$ définies pour $n$ entier naturel non nul par

$$I_n = \int_0^1 \left(1-x^n\right)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On pose $J_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ et, pour $n$ entier naturel non nul :

$$J_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. En utilisant des considérations d'aire, prouver que $J_0 = \dfrac{\pi}{4}$.
2. **a.** Calculer $J_1$

   **b.** En déduire la valeur de $I_1$ et donner une interprétation géométrique du résultat trouvé.

3. **a.** Étudier le sens de variation de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   **b.** En déduire que les suites $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.

4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a

$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

   **b.** En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$

**C**

On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de $I_n$ en fonction de $n$.

1. **a.** Démontrer que la fonction $v$ définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$v(x) = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}$$

   a pour fonction dérivée sur $[0\,;\,1[$, $v'$ telle que $v'(x) = x\sqrt{1-x^2}$. On admet que le résultat reste vrai sur $[0\,;\,1]$.

**b.** À l'aide d'une intégration par parties faisant intervenir la fonction $v$, démontrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3, on a

$$(n+2)J_n = (n-1)J_{n-2}.$$

Vérifier que cette formule reste encore valable pour $n = 2$.

**2.** Démontrer par récurrence que, pour tout $p$ entier naturel non nul, on a :

$$J_{2p} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2p-1)}{4 \times 6 \times \cdots \times (2p+2)} \times \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad J_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2p))}{3 \times 5 \times \cdots \times (2p+3)}.$$