

❧ Baccalauréat C Maroc, Sénégal, Portugal 1989 ❧

EXERCICE 1

5 POINTS

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit U le point d'affixe 1 et V le point d'affixe i . On notera $\arg z$ un argument du nombre complexe non nul z .

1. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c , on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \text{ modulo } (2\pi).$$

2. Quel est l'ensemble des points M du plan, d'affixe z , tels que $\frac{z-i}{z-1}$ soit un imaginaire pur non nul ?
3. On considère dans le plan les points U d'affixe 1, M d'affixe z , M' d'affixe z' et P d'affixe zz' où z et z' sont deux nombres complexes distincts et différents de 0 et 1.
 - a. Démontrer que les points M, M', P sont distincts deux à deux.
 - b. Démontrer que pour tout z et tout z' vérifiant les conditions ci-dessus :

$$\arg \frac{zz' - z'}{zz' - z} = \arg \frac{z'}{z' - 1} - \arg \frac{z}{z - 1} \text{ modulo } (2\pi).$$

- c. En déduire que M, M', P sont alignés si, et seulement si, les points O, U, M, M' sont cocycliques ou alignés.

EXERCICE 2

5 POINTS

Dans un plan orienté on considère un triangle rectangle isocèle AHH' tel que

$$(\overrightarrow{HH'}, \overrightarrow{HA}) = \frac{\pi}{2} \text{ modulo } (2\pi).$$

Soit (D) la droite (HH').

M est un point quelconque de la droite (D) et M' le point tel que le triangle AMM' est rectangle isocèle et vérifie

$$(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} \text{ modulo } (2\pi).$$

1. Préciser la similitude directe de centre A qui transforme M en M'.
2. Montrer que l'ensemble (E) des points M', quand M décrit la droite (D), est la droite perpendiculaire en H' à la droite (AH').
3. Soit J le milieu de [MM'] et J₀ le milieu de [HH'].
 - a. Calculer $\frac{AJ}{AM}$ et montrer que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AJ})$ est indépendant de M.
 - b. Quelle est la nature de l'ensemble (F) des points J lorsque M décrit la droite (D) ?
 - c. Préciser la position de (F). (On pourra se servir de la droite (AJ₀).) Représenter (F) sur une figure.

PROBLÈME

10 POINTS

Partie A

Étude de la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2e^x - 2 - xe^x.$$

1. Étudier les variations de f et les limites de f quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$; dresser son tableau de variation.
2. Dédire de l'étude de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ l'existence pour la courbe représentative \mathcal{C} de f d'une asymptote (D); déterminer l'intersection de \mathcal{C} et de (D) et la position relative de la courbe \mathcal{C} et de la droite (D).
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} deux solutions dont l'une notée a dans la suite du problème vérifie $1,5 < a < 1,6$. Quelle est l'autre solution ?
4. Tracer \mathcal{C} et D dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

Partie B

Étude de la suite numérique u définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 2 - 2e^{-u_n}$.

1. Étude théorique :

On désigne par I l'intervalle $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

- a. Étudier les variations de la fonction g définie sur I par

$$g(x) = 2 - 2e^{-x}.$$

Montrer que $g(I) \subset I$ et que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

- b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , u_n appartient à I puis que la suite u est croissante.
En déduire que la suite est convergente vers un réel ℓ tel que $g(\ell) = \ell$.
Montrer à l'aide de la partie A que $\ell = a$.
- c. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$|u_{n+1} - a| \leq |u_n - a| \quad \text{puis que } |u_n - a| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

2. Étude numérique : soit p un entier strictement positif.

- a. Utiliser l'inégalité précédente pour déterminer un entier n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , on ait $|u_n - a| \leq 10^{-p}$.
Préciser n_0 pour $p = 3$.
- b. Écrire la valeur approchée par défaut avec 3 décimales de u_1, u_2, u_3, u_4 et u_7 que permet de trouver votre calculatrice.