

❧ Baccalauréat C Maroc, Sénégal, Portugal 1989 ❧

**EXERCICE 1**

**5 POINTS**

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit U le point d'affixe 1 et V le point d'affixe  $i$ . On notera  $\arg z$  un argument du nombre complexe non nul  $z$ .

1. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives  $a, b, c$ , on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \text{ modulo } (2\pi).$$

2. Quel est l'ensemble des points M du plan, d'affixe  $z$ , tels que  $\frac{z-i}{z-1}$  soit un imaginaire pur non nul ?
3. On considère dans le plan les points U d'affixe 1, M d'affixe  $z$ , M' d'affixe  $z'$  et P d'affixe  $zz'$  où  $z$  et  $z'$  sont deux nombres complexes distincts et différents de 0 et 1.
- a. Démontrer que les points M, M', P sont distincts deux à deux.
- b. Démontrer que pour tout  $z$  et tout  $z'$  vérifiant les conditions ci-dessus :

$$\arg \frac{zz' - z'}{zz' - z} = \arg \frac{z'}{z' - 1} - \arg \frac{z}{z - 1} \text{ modulo } (2\pi).$$

- c. En déduire que M, M', P sont alignés si, et seulement si, les points O, U, M, M' sont cocycliques ou alignés.

**EXERCICE 2**

**5 POINTS**

Dans un plan orienté on considère un triangle rectangle isocèle AHH' tel que

$$(\overrightarrow{HH'}, \overrightarrow{HA}) = \frac{\pi}{2} \text{ modulo } (2\pi).$$

Soit (D) la droite (HH').

M est un point quelconque de la droite (D) et M' le point tel que le triangle AMM' est rectangle isocèle et vérifie

$$(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} \text{ modulo } (2\pi).$$

1. Préciser la similitude directe de centre A qui transforme M en M'.
2. Montrer que l'ensemble (E) des points M', quand M décrit la droite (D), est la droite perpendiculaire en H' à la droite (AH').
3. Soit J le milieu de [MM'] et J<sub>0</sub> le milieu de [HH'].
- a. Calculer  $\frac{AJ}{AM}$  et montrer que  $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AJ})$  est indépendant de M.
- b. Quelle est la nature de l'ensemble (F) des points J lorsque M décrit la droite (D) ?
- c. Préciser la position de (F). (On pourra se servir de la droite (AJ<sub>0</sub>).)  
Représenter (F) sur une figure.

## PROBLÈME

10 POINTS

## Partie A

Étude de la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2e^x - 2 - xe^x.$$

1. Étudier les variations de  $f$  et les limites de  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $-\infty$ ; dresser son tableau de variation.
2. Dédire de l'étude de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  l'existence pour la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de  $f$  d'une asymptote (D); déterminer l'intersection de  $\mathcal{C}$  et de (D) et la position relative de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite (D).
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  deux solutions dont l'une notée  $a$  dans la suite du problème vérifie  $1,5 < a < 1,6$ . Quelle est l'autre solution ?
4. Tracer  $\mathcal{C}$  et D dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

## Partie B

Étude de la suite numérique  $u$  définie par  $u_0 = \frac{3}{2}$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_{n+1} = 2 - 2e^{-u_n}$ .

## 1. Étude théorique :

On désigne par I l'intervalle  $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ .

- a. Étudier les variations de la fonction  $g$  définie sur I par

$$g(x) = 2 - 2e^{-x}.$$

Montrer que  $g(I) \subset I$  et que pour tout  $x \in I$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

- b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  appartient à I puis que la suite  $u$  est croissante.  
En déduire que la suite est convergente vers un réel  $\ell$  tel que  $g(\ell) = \ell$ .  
Montrer à l'aide de la partie A que  $\ell = a$ .
- c. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$|u_{n+1} - a| \leq |u_n - a| \quad \text{puis que } |u_n - a| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

2. Étude numérique : soit  $p$  un entier strictement positif.

- a. Utiliser l'inégalité précédente pour déterminer un entier  $n_0$  tel que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ , on ait  $|u_n - a| \leq 10^{-p}$ .  
Préciser  $n_0$  pour  $p = 3$ .
- b. Écrire la valeur approchée par défaut avec 3 décimales de  $u_1, u_2, u_3, u_4$  et  $u_7$  que permet de trouver votre calculatrice.