Baccalauréat C Nancy-Metz[1] 1989

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \text{ de } N.$$

puis la convergence de la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p, \quad \text{pour tout entier } n.$$

1. **a.** Montrer que pour tout entier n, u_n est positif.
   b. Montrer que la suite (S_n) est décroissante.
   c. En déduire qu'elle converge et trouver sa limite.
2. Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}.$$

   et en déduire que S_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. Soient A, B et C quatre points distincts de l'espace.
   Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si :

$$\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2$$

   (On pourra par exemple exprimer $\mathrm{AC}^2 - \mathrm{AD}^2$ ainsi que $\mathrm{BC}^2 - \mathrm{BD}^2$ sous forme de produits scalaires.)
2. On considère un tétraèdre ABCD tel que (AB) est perpendiculaire à (CD), et (BC) perpendiculaire à (AD).
   Montrer que (BD) est perpendiculaire à (AC).

PROBLÈME **12 POINTS**

Le plan affine P euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. À tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans ce repère, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ affixe de M. On désigne par $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ les parties réelles et imaginaires de z.
Le plan P privé de l'origine O est noté P*. Pour tracer les figures on utilisera une unité graphique de 2 cm.
Les parties B et C sont indépendantes.

Partie A

On appelle Γ l'ensemble des points du plan P dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient

$$x^2 - y^2 - 2xy\sqrt{3} + 2 = 0.$$

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Reims, Strasbourg

1. On pose

$$\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

et on considère la transformation g de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point g(M) d'affixe jz.

Montrer que g est une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. On désigne par H l'ensemble des points M de P d'affixe z vérifiant

$$\mathrm{Re}\left(z^2\right) = 1.$$

Définir la nature de cet ensemble H et le tracer.

3. Soit M un point de P d'affixe z. Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à l'ensemble Γ si, et seulement si,

$$\mathrm{Re}[(\mathrm{j}z)^2] = 1.$$

4. Montrer que H est l'image de Γ par la transformation g.
En déduire la nature de Γ et tracer Γ sur la figure précédente.

Partie B

Soit f la transformation de P* dans P* qui à tout point M de P* d'affixe z fait correspondre le point f(M) d'affixe $\frac{1}{z}$.
On désigne par K l'image de H par la transformation f.

1. Soit M un point de P* d'affixe z ; on note $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où ρ est un nombre réel strictement positif. Montrer que M est dans K si, et seulement si,

$$\rho^2 = \cos 2\theta.$$

Vérifier que l'ensemble K est contenu dans le disque de centre O et de rayon 1. Quels sont les points de K situés à la distance 1 de O ?

2. Déterminer l'ensemble des nombres réels θ tel que $\cos 2\theta$ est strictement positif. En déduire que les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de tout point de K peuvent s'écrire :

$$x = \cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}, \quad y = \sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}$$

avec $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}$.

3. Trouver les coordonnées des points de K d'abscisse positive dont l'ordonnée est la plus grande.

Partie C

Soit M un point de P* d'affixe z. On note N son symétrique par rapport à l'axe $\left(\mathrm{O}, \vec{u}\right)$.

1. Montrer que les points O, N et f(M) sont alignés.

2. En utilisant la deuxième question de la première partie, montrer que si M est dans H l'argument de $z^2 - 1$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ ou a $-\frac{\pi}{2}$.

3. Vérifier que

$$\arg\left(z - \frac{1}{z}\right) - \arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg\left(z^2 - 1\right).$$

4. Déduire des questions précédentes que si M est dans H, alors $f(\mathrm{M})$ est la projection orthogonale de M sur la droite passant par O et N. Utiliser cette propriété pour tracer l'image par f des points de H d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ et 3.
5. Soit Δ l'image de Γ par la transformation f. Montrer que Δ est aussi l'image de K par la transformation g.