

❧ **Baccalauréat C novembre 1989** ❧
Nouvelle-Calédonie

EXERCICE 1

4 points

On considère l'équation différentielle :

$$y'' + \alpha y = 0 \quad (E)$$

dans laquelle α est un paramètre réel.

1. On suppose ici $\alpha < 0$.
Écrire la solution générale de l'équation (E).
Montrer que l'équation n'admet qu'une solution f nulle simultanément aux points 0 et π .
2. Même question en supposant $\alpha = 0$.
3. On suppose désormais $\alpha > 0$.
En posant $\alpha = \omega^2$, écrire la solution générale de l'équation (E). À quelle condition sur ω l'équation (E) admet-elle une solution g vérifiant simultanément les conditions suivantes :
 - a. g n'est pas identiquement nulle sur \mathbb{R} ;
 - b. $g(0) = g(\pi) = 0$?

EXERCICE 2

4 points

Dans le plan on considère deux droites D, D' distinctes et parallèles, et un point A n'appartenant ni à D , ni à D' .

1. Construire à l'aide d'une transformation géométrique simple un triangle équilatéral PAP' tel que P soit sur D et P' sur D' .
Préciser le nombre de triangles répondant à la question.
2. Déterminer un carré admettant pour sommets A (point considéré ci-dessus), un point Q de D , un point Q' de D' et tel que $[AQ']$ soit une diagonale de ce carré.
Préciser le nombre de carrés répondant à la question.

PROBLÈME

12 points

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}}.$$

1. Construire la courbe représentative (\mathcal{C}') de la dérivée f' , de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé : $\mathcal{R} = (\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Montrer que $f'(x) \geq -\frac{1}{4}$ pour tout x réel.
2. Montrer que l'équation $f'(x) = 1$ admet une solution unique :

$$c = 2 \ln \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Calculer $f(c)$.

3. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

Déterminer le signe de $g(c)$ et montrer que la restriction de g à chacun des deux intervalles $] -\infty ; c]$ et $[c ; +\infty [$ est strictement monotone.

En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions a et b avec $a < 0 < c < b$.

4. Tracer sur un graphique différent du précédent la courbe représentative (\mathcal{C}) de f .
5. Soit x_0 tel que $x_0 \leq c$, et soit $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.
Montrer que l'on a $x_n \leq 0$ pour tout $n \geq 1$.

6. Sous les hypothèses de la question précédente, montrer que l'on a :

$$|x_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4} |x_n - a| \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

7. En déduire que la suite (x_n) converge vers a .