Baccalauréat C Paris [1] 1989

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, l'unité graphique étant 4 cm, on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = -\text{j}z + \text{i}, \quad \text{où} \quad \text{j} = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

1. Montrer que f admet exactement un point invariant Ω, dont on donnera l'affixe. Caractériser géométriquement f.
2. On définit dans $\mathscr{P}$ la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} M_0 & = & \text{O} \\ M_{n+1} & = & f(M_n),\ \text{pour tout}\ \ n. \end{array}\right.$$

   a. Construire $\Omega,\ M_0,\ M_1,\ M_2$.

   b. Pour tout entier n, on note z_n l'affixe de M_n et on pose

$$Z_n = z_n - \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}.$$

   Déterminer un nombre complexe a tel que, pour tout entier n,

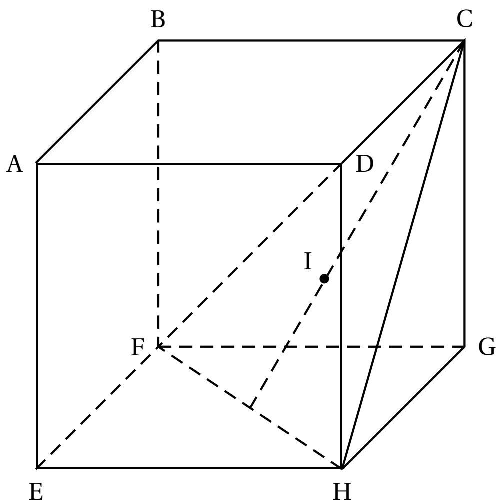
$$Z_{n+1} = aZ_n.$$

   Mettre a sous forme trigonométrique et déterminer un entier p strictement positif tel que $a^p = 1$.

   c. Calculer Z_n puis z_n en fonction de n. Calculer $z_{1\,989}$ et placer $M_{1\,989}$ sur le dessin.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête a.
On note I l'isobarycentre du triangle CFH.



1. **a.** Prouver que le triangle CFH est équilatéral.

1. Paris, Créteil, Versailles

- **b.** Prouver que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur de [CH] et au plan médiateur de [CF].
- **c.** En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par I.

2. On note P le plan contenant les droites (AB) et (HG) et P$'$ le plan contenant les droites (AD) et (FG). On désigne par s et s(les réflexions par rapport aux plans P et P$'$.

- **a.** Déterminer l'intersection des plans P et P$'$.
- **b.** Déterminer les images des points C, F et H par s puis s', puis par $s' \circ s$.
- **c.** Indiquer la nature de $s' \circ s$ et déterminer ses éléments caractéristiques.

PROBLÈME **10 POINTS**

Partie A :

L ?objet de cette partie est d'étudier la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \text{ si } t > 0, \text{ et } g(0) = 1.$$

1. **a.** Établir que g est continue en 0.

- **b.** Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. **a.** Pour tout $t > 0$, calculer $g'(t)$.

- **b.** Prouver que pour tout $t > 0$, $1 + t \leqslant \mathrm{e}^t$.
- **c.** En déduire le signe de g' et le sens de variation de g (on ne demande pas de construire la courbe représentative de g).

3. On se propose d ?étudier la dérivabilité de g en 0.
À cet effet on introduit la fonction h définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \mathrm{e}^{-t}.$$

- **a.** Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$, ainsi que les valeurs de $h(0)$ et $h'(0)$.
- **b.** Prouver que pour tout $t > 0$:

$$0 \leqslant h(t) \leqslant \frac{t^3}{6} \qquad (1)$$

pour cela, on établira d'abord que $0 \leqslant h''(t) \leqslant t$, et on en déduira un encadrement de h' puis de h.

- **c.** Déduire de la relation (1) un encadrement de $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}-t}{t^2}$.
Prouver finalement que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Partie B :

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}\right) \text{ si } x > 0, \text{ et } f(0) = 1$$

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Prouver que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-2x}\left(2x+1-\mathrm{e}^{x}(x+1)\right).$$

c. À partir de l'inégalité $1+x \leqslant \mathrm{e}^x$, établie au A. 2. b., montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) \leqslant 0$.

2. Vérifier que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = 2g(2x) - g(x) \qquad (2)$$

où g est la fonction étudiée dans la partie A.
En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

3. Construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f, le plan étant rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Unité graphique : 4 cm.

Partie C :

On étudie maintenant la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

1. **a.** Étudier le sens de variation de F.

b. Établir que pour tout $x > 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
En déduire que pour tout $t > 0$, $0 \leqslant F(t) \leqslant 1$.

2. Soit G la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$G(t) = \int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. En utilisant la relation (2), prouver que pour tout $t > 0$:

$$F(t) = G(2t) - G(t).$$

b. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$F(t) = \int_0^{2t} g(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

c. Établir que pour tout $x > 1$:

$$0 \leqslant \frac{1}{x} - g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

En déduire que pour tout $t > 1$:

$$0 \leqslant \ln 2 - F(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

d. Prouver finalement que $F(t)$ admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.