Baccalauréat C juin 1990
Aix–Marseille–Nice–Corse–Montpellier–Toulouse

EXERCICE 1 **4 points**

Soit P la plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique 1 cm. On donne les points A et B d'affixes respectives 12 et 9i et l'application f de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z définie par

$$Z = -\frac{3}{4}\text{i}z + 9\text{i}.$$

1. Démontrer que f admet un point invariant Ω de coordonnées $\left(\dfrac{108}{25}\ ;\ \dfrac{144}{25}\right)$.

Démontrer que f est une similitude plan directe d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, de rapport $\dfrac{3}{4}$. Quel est son centre ?

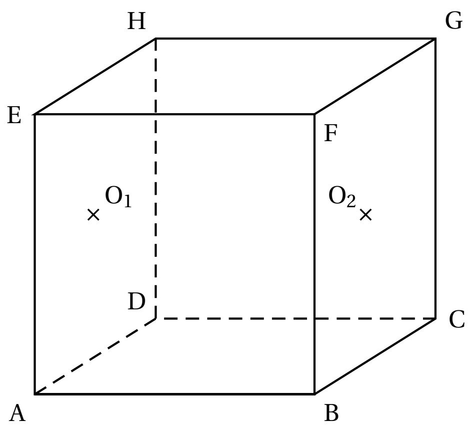
2. Quelles sont les images par f des points A et O ?

Montrer que Ω est commun aux deux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ de diamètres respectifs $[OA]$ et $[OB]$.

Établir que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB et montrer que $\Omega A \times \Omega B = \Omega O^2$.

Faire une figure comportant les points $\Omega,\ A,\ B$ ainsi que les cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

EXERCICE 2 **4 points**



On considère un cube ABCDEFGH, on appelle O_1 et O_2 les centres respectifs des faces ADHE et BCGF.

Soit N un point du segment [HF] et P un point du segment [AC] définis par $\overrightarrow{\text{HN}} = k\overrightarrow{\text{HF}}$ et $\overrightarrow{\text{AP}} = k\overrightarrow{\text{AC}}$ où $k \in [0\ ;\ 1]$.

1. Montrer que N est barycentre du système des points pondérés $\{(\text{H},\ 1-k),\ (\text{F},\ k)\}$ et que P est barycentre du système des points pondérés $\{(\text{A},\ 1-k),\ (\text{C},\ k)\}$

2. Soit d le demi-tour d'axe (O_1O_2).

Quelles sont les images par d des points A, C et P ?

3. I étant le milieu du segment [NP], montrer que $\overrightarrow{\text{HN}} + \overrightarrow{\text{AP}} = 2\overrightarrow{O_1\text{I}}$ puis que $\overrightarrow{\text{HF}} + \overrightarrow{\text{AC}} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$.

En déduire que $\overrightarrow{O_1\text{I}} + = k\overrightarrow{O_1O_2}$, $k \in [0\ ;\ 1]$.

Quel est l'ensemble des points I lorsque k décrit l'intervalle $[0\,;\,1]$?

PROBLÈME **4 points**

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}^\star$, définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x - n - \frac{n\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de f_n dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ \right)$ est appelée $\mathscr{C}_n$. On prendre 2 cm pour unité graphique.

A. Étude des variations de f_n, ($n \in \mathbb{N}^\star$).

1. Soit, pour tout entier naturel n non nul, la fonction g_n définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g_n(x) = x^2 - n + n\ln x.$$

Étudier le sens de variation de g_n, préciser ses limites en 0 et en $+\infty$. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique notée α_n et que cette solution appartient à l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.

2. Établir, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f_n'(x) = \dfrac{g_n(x)}{x^2}$; étudier le signe de $g_n(x)$ et en déduire le sens de variation de f_n.

3. Étudier les limites de f_n en 0 et en $+\infty$. Montrer que la droite D_n d'équation $y = x - n$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_n$. Étudier la position de $\mathscr{C}_n$ par rapport à D_n lorsque x décrit l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Étude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

1. α_n étant le nombre défini en **??**, montrer que pour $n = 1$, $\alpha_1 = 1$ et que, pour $n = 2$, $1,2 < \alpha_2 < 1,3$.

2. En utilisant les règles sur les inégalités et l'encadrement de α_2 ci-dessus, montrer que l'on a $f_2(\alpha_2) \geqslant -1,24$.

En utilisant le sens de variation de f_2 montrer que $f_2(\alpha_2) \leqslant -1,10$.

3. Former les tableaux de variations de f_1 et f_2.

4. Représenter dans le même repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ \right)$ les droites D_1 et D_2, puis les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

5. Calculer en cm^2 la valeur exacte de l'aire S_1 de la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_1$ et les droites d'équations $x = 1$, $x = \mathrm{e}$, $y = 0$.

C. Étude des positions relatives des courbes C_n.

1. Pour tout entier naturel non nul et pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, calculer la différence $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Soit d la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$d(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

a. Étudier les variations de d, préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b. Déduire de la question précédente que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique β et que β appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

c. Montrer que pour tout entier naturel non nul on a $f_n(\beta) = \beta$.

3. À l'aide des résultats obtenus dans la question 1. et 2. de cette partie, établir que les courbes $\mathscr{C}_n$ se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.