Baccalauréat C Algérie juin 1990

Exercice 1 **3,5 points**

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; on choisit 1 cm pour unité.
On considère le cercle (C_1) de centre O et de rayon 8 et le cercle (C_2) de centre O et de rayon 2.
Ψ étant un nombre réel, on considère le point I de (C_1) tel que :

$$\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OI}\right) = \Psi \text{ modulo } 2\pi$$

et le point J de (C_2) tel que :

$$\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OJ}\right) = -\Psi \text{ modulo } 2\pi$$

On appelle M le milieu du segment [IJ].

1. Représenter les cercles (C_1) et (C_2) ; placer I, J et M en choisissant $\Psi = \dfrac{\pi}{3}$.
2. Dans cette question Ψ est un réel quelconque.
   a. Calculer, en fonction de Ψ, les coordonnées des points I, J et M.
   b. Soit (E) l'ensemble des points M quand Ψ décrit $\mathbb{R}$; démontrer que la tangente en M à (E) est la médiatrice du segment [IJ].
   c. Préciser la nature de (E) et écrire une équation cartésienne de (E).
   d. Tracer (E) sur la figure de la 1re question.

Exercice 2 **4,5 points**

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit A le point d'affixe $-2+3\text{i}$ et B le point d'affixe $1-3\text{i}$.
Soit M le point d'affixe z, $z \neq -2+3\text{i}$; à z on associe le nombre complexe z' tel que :

$$z' = \frac{z-1+3\text{i}}{z+2-3\text{i}}.$$

1. **a.** Établir une relation entre un argument de z' et l'angle orienté $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$.
   b. Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que z' ait pour argument $\dfrac{\pi}{2}$.
2. Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que $\left|z'\right| = 2$.
3. Déterminer l'affixe du point commun K à (E_1) et (E_2).

Problème **12 points**

Toutes les représentations graphiques demandées seront effectuées sur la même figure, dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 4 cm).

A. On considère la fonction numérique f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & x\ln\dfrac{x+2}{x} \quad \text{si } x \text{ appartient à }]0 ; +\infty[\\ f(0) & = & 0. \end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que f a pour limite 0 en 0.

   b. f est-elle dérivable en 0 ?

   c. En posant

$$h = \frac{2}{x} \quad (x > 0),$$

   trouver la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. **a.** Pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et vérifier que

$$f''(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}.$$

   b. Étudier le sens de variation de f', et trouver la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire le signe de f'.

   c. Dresser le tableau des variations de f

3. On appelle (C) la représentation graphique de f dans le plan (P) rapporté au repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Tracer (C) en indiquant la tangente au point O et le point A d'abscisse 2.

4. Soit u la fonction numérique définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = \frac{2x}{x+2}$$

   et (H) sa représentation graphique dans le plan (P) rapporté au repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

   a. Dresser le tableau de variations de u.

   b. Vérifier que pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ on a :

$$f(x) - u(x) = xf'(x).$$

   En déduire la position relative de (C) et de (H). Tracer (H) en indiquant le point B d'abscisse 2.

   c. λ étant un réel strictement positif, montrer que la tangente à (C) au point d'abscisse λ. rencontre l'axe des ordonnées au point J d'ordonnée $u(\lambda)$. En déduire à l'aide du tracé de (H) la détermination de la tangente à (C) au point d'abscisse λ. Tracer de cette façon la tangente à (C) en A.

B. On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions g, définies et dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, et possédant la propriété P suivante :
Pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$,

$$g(x) - xg'(x) = \frac{2x}{x+2}$$

g étant une fonction définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on pose, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$,

$$G(x) = \frac{g(x)}{x}$$

1. Montrer que g possède la propriété P si et seulement si : pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$,

$$G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}.$$

2. En déduire l'ensemble (E).

C. k étant un réel, on considère la fonction numérique f_k définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_k(x) & = & f(x)+kx \quad \text{si } x \text{ appartient à }]0\,;\,+\infty[\\ f_k(0) & = & 0. \end{array}\right.$$

On appelle $(\mathscr{C}_k)$ la représentation graphique de f_k dans le plan (P) rapporté au repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. On suppose k strictement positif. Donner le tableau des variations de f_k.

2. On suppose dans cette question que k est strictement négatif.

a. En utilisant les variations de f' obtenues dans A. 2. b., montrer que l'équation $f_k'(x) = 0$ admet dans $]0\,;\,+\infty[$ une solution unique notée v_k.

b. Dresser le tableau de variations de f_k.

c. On note I_k le point de $(\mathscr{C}_k)$ d'abscisse v_k. Montrer que I_k appartient à (H) (on pourra utiliser la propriété Pt).