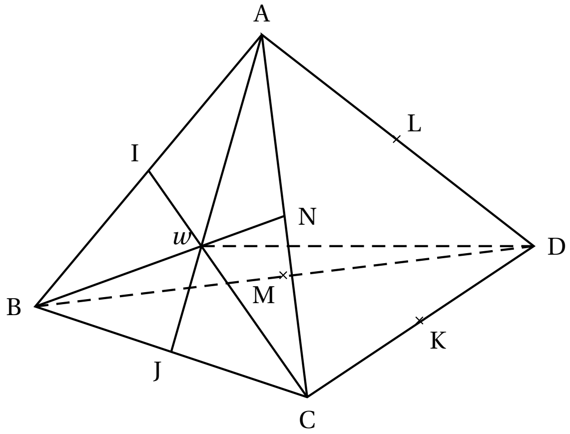
Baccalauréat C Amérique du Nord [1] juin 1990

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Dans l'espace orienté, on considère un tétraèdre régulier ABCD. Les points I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA], [BD] et [AC].



1. **a.** Démontrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (ADJ).

   b. Indiquer cinq autres orthogonalités démontrables de la même manière qu'au a.

   c. Soit w l'isobarycentre des points A, B et C. Démontrer que (Dw) est orthogonale au plan (ABC).

2. On considère la réflexion s par rapport au plan (ADJ) et la réflexion s' par rapport au plan (CDI). On pose $r = s \circ s'$.

   a. Déterminer l'axe de la rotation r.

   b. Déterminer les images par r de A, B et C. En déduire une mesure de l'angle de r.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}.$$

Soit Γ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et Δ le domaine limité par Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

1. **a.** Montrer que Γ est incluse dans la courbe $\mathcal{H}$ d'équation :

$$2y^2 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

   b. Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole. Donner son axe focal, son centre et ses sommets. Tracer $\mathcal{H}$ puis Γ.

1. et Espagne

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

2. Soit u un nombre réel de $[0\,;\,1]$. On pose :

$$\begin{array}{rcl} A & = & 1+\dfrac{u}{2}+\sqrt{1+u} \\ B & = & 1+\dfrac{u}{2}-\sqrt{1+u}. \end{array}$$

Calculer le produit AB. En déduire que :

$$0 \leqslant 1+\frac{u}{2}-\sqrt{1+u} \leqslant \frac{u^2}{8}. \qquad (1)$$

3. Soit $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. (On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.)

a. Utiliser (1) pour démontrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$:

$$1+2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 \leqslant \sqrt{1+4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} \leqslant 1+2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

b. En déduire un encadrement de I.

c. Donner une interprétation graphique de l'intégrale I.

PROBLÈME **11 POINTS**

Dans le plan orienté on donne une courbe $\mathscr{C}$. On se propose d'étudier une suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ de points du plan, construite à partir de $\mathscr{C}$.
La partie A. étudie géométriquement un exemple où $\mathscr{C}$ est une droite D.
Dans la partie B. on met en équation le problème dans le cas général.
La partie C. utilise les équations obtenues pour traiter un second exemple.

A. Étude géométrique d'une transformation du plan

On donne un triangle OIJ isocèle, rectangle en O et direct (c'est-à-dire que $\left(\overrightarrow{\text{OI}}\,,\,\overrightarrow{\text{OJ}}\right)=+\dfrac{\pi}{2}\right)$. On note D la droite (IJ).
À tout point M de la droite D, on associe le point N du plan tel que OMN soit isocèle rectangle en N et direct (c'est-à-dire que $\left(\overrightarrow{\text{OM}}\,,\,\overrightarrow{\text{ON}}\right)=+\dfrac{\pi}{4}\right)$ et le point P projeté de N sur D parallèlem nt à (OJ).

1. Faire une figure. On prendra OI = OJ = 4 cm et on choisira le point M tel que $\overrightarrow{\text{IM}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{IJ}}$.

2. **a.** Montrer qu'il existe une similitude directe s et une seule de centre O, transformant M en N. Préciser son angle et son rapport.

b. Déterminer l'image Δ de D par s. Placer Δ sur la figure.

3. Soit O′ l'intersection de Δ et D.
Montrer qu'il existe une similitude directe s' et une seule, de centre O′, transformant N en P.
Préciser son angle et son rapport.

4. Préciser la nature des transformations :

$$t_1 = s'\circ s \quad \text{et} \quad t_2 = s\circ s'.$$

(On pourra étudier les applications vectorielles associées.)

5. On considère les suites $(A_n)_{n\geqslant 0}$ et $(B_n)_{n\geqslant 0}$ de points du plan définies par :
– la donnée d'un point A_0 de D et

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

– le procédé suivant :
Pour tout entier $n \geqslant 0$
le triangle $\text{O}A_nB_n$ est isocèle rectangle en B_n et direct et pour tout entier $n \geqslant 0$
A_{n+1} est le projeté de B_n sur D parallèlement à (OJ).

a. Construire et placer sur la figure les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, A_3.
(On choisira A_0 tel que $\overrightarrow{\text{I}A_0} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{IJ}}$.)

b. Prouver que pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$s(A_n) = B_n \quad \text{et} \quad s'(B_n) = A_{n+1}.$$

c. En déduire (à l'aide des résultats de la question 4. que pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\overrightarrow{A_0A_n} = n\overrightarrow{A_0A_1} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B_0B_n} = n\overrightarrow{B_0B_1}.$$

B. Mise en équation du cas général

Dans toute la suite du problème on prend $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\text{OI}}, \overrightarrow{\text{OJ}}\right)$ comme repère orthonormal direct.
On remplace la droite D par la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas en 0.
Pour tout nombre réel t on note $M(t)$ le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse t et $N(t)$ l'image de $M(t)$ par la similitude s introduite en A. 2. a.

1. Donner l'écriture complexe de la similitude s.
2. Soit $X(t)$ et $Y(t)$ les coordonnées du point $N(t)$. Montrer que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x(t) & = & \dfrac{1}{2}(t - f(t)) \\ y(t) & = & \dfrac{1}{2}(t + f(t)). \end{array}\right.$$

Ainsi, lorsque M(t) parcourt $\mathscr{C}$, N(t) parcourt la courbe Γ définie par la représentation paramétrique (1).

3. Soit $(A_n)_{n \geqslant 0}$ et $(B_n)_{n \geqslant 0}$ les suites définies comme en A. 5. à partir d'un point A_0 de $\mathscr{C}$ et le procédé suivant :
Pour tout entier $n \geqslant 0$,
le triangle $\text{O}A_nB_n$ est isocèle rectangle en B_n et direct et pour tout entier $n \geqslant 0$,
A_{n+1} est le point de $\mathscr{C}$ ayant la même abscisse que B_n. On note x_n et y_n les coordonnées de B_n.

a. À l'aide de (1), exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et $f(x_n)$.

b. Retrouver ainsi la disposition des points des suites $(A_n)_{n \geqslant 0}$ et $(B_n)_{n \geqslant 0}$ dans la situation étudiée dans la partie A., où $\mathscr{C}$ est la droite (IJ).

C. Étude d'un autre exemple

Dans cette partie on suppose que $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $y = \text{e}^x$ dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\text{OI}}, \overrightarrow{\text{OJ}}\right)$ (unité graphique : 4 cm).

1. **a.** Étudier les variations des fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(t - \text{e}^t\right) \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{1}{2}\left(t + \text{e}^t\right).$$

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

b. Dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ,\ \overrightarrow{OJ}\right)$ tracer la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que la courbe Γ définie par la représentation paramétrique $t \longmapsto (g(t)\ ;\ h(t))$.

c. Préciser la tangente à Γ au point de paramètre $t = 0$.

2. **a.** Montrer que l'équation $h(t) = 0$ admet une solution unique α telle que :

$$-0,6 \leqslant \alpha \leqslant -0,5.$$

b. En déduire que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un point unique L.

c. Démontrer que $g(\alpha) = \alpha$.

3. On considère les suites de points $(A_n)_{n\geqslant 0}$ et $(B_n)_{n\geqslant 0}$ définies comme en B. 3., mais où A_0 est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -3.
Les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $\left(y_n\right)_{n\geqslant 0}$ sont alors définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = g(-3) \\ \text{et pour } n \geqslant 0 \\ x_{n+1} = g\left(x_n\right) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} y_0 = h(-3) \\ \text{et pour } n \geqslant 0 \\ y_{n+1} = h\left(x_n\right) \end{array}\right.$$

a. Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2.

b. Démontrer par récurrence, que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée par α et est croissante.

c. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers α et que la suite $\left(y_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

d. Interpréter graphiquement le résultat obtenu à la question c.

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux