∽ Baccalauréat C groupe 3 [1] 1990 ∽

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Soit θ un nombre réel tel que $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2\cos^2\theta - 2z\sin\theta\cos\theta + 1 = 0.$$

Déterminer le module et un argument des solutions éventuelles de cette équation.

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$(1+\cos 2\theta)y'' - (2\sin 2\theta)y' + 2y = 0.$$

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soient Γ le cercle de centre 0 et de rayon R, $[AA']$ un diamètre fixé de Γ, P le milieu de $[OA']$.
Une droite distincte de la droite (AA') et de la perpendiculaire en P à (AA') pivote autour de P et coupe Γ en B et C.

1. Déterminer l'ensemble E_1 des milieux M de $[BC]$ lorsque Δ varie.
2. **a.** Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
   La droite $(A'M)$ coupe (AH) en D.
   Déterminer l'ensemble E_2 des points D lorsque M décrit E_1.

   b. Montrer que $A'BDC$ est un parallélogramme.
   En déduire que D est l'orthocentre du triangle ABC.
3. La droite (AM) coupe (OD) en I. Montrer que $2\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0}$.
   Que représente I pour le triangle ABC ?
   Déterminer l'ensemble E_3 des points I lorsque M décrit E_1.

PROBLÈME **10 POINTS**

I.

1. Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln\left(x^2+1\right).$$

Étudier les variations de g, déterminer sa limite en $+\infty$.
En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1~;~+\infty[$. Prouver que $\dfrac{7}{4} < \alpha < 2$.

2. On note Γ la courbe représentative de g. (On ne demande pas la construction de Γ.)

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims

a. Écrire une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 2 ; déterminer la valeur exacte de l'abscisse x_0 du point d'intersection de T et de $x'Ox$.

On note v_1 et v_2 respectivement les valeurs approchées par défaut et excès de x_0 à 10^{-3} près.

Des signes de $g(v_1)$ et $g(v_2)$ déduire un encadrement de α à 10^{-3} près.

Préciser le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

II. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité 2 cm.
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0 \\ f(x) & = & \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{array}\right.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est dérivable en 0. Étudier les variations de f et sa limite en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(x+1) \leqslant x$.
   En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et de sa tangente en 0.
   Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

III. On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

1. Soit r un réel strictement positif fixé. Montrer que $F(r)$ et $F(-r)$ sont les aires de domaines isométriques du plan.
   En déduire la parité de F.
   Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}^+$.
2. **a.** Montrer que $0 \leqslant F(1) \leqslant \dfrac{1}{2}$ en utilisant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente en O.

   b. Montrer que pour tout réel t supérieur ou égal à 1,

$$\frac{\ln\left(t^2\right)}{t} \leqslant \frac{\ln\left(t^2+1\right)}{t} \leqslant \frac{\ln\left(2t^2\right)}{t}.$$

   c. Soit x un réel, $x \geqslant 1$, calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

   En déduire les limites de $F(x)$ et de $\dfrac{F(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Donner l'allure de la courbe représentative de F en prenant 0,4 pour valeur approchée de $F(1)$.