Baccalauréat C juin 1990
Centres étrangers II [1]

EXERCICE 1 **4 points**

(A, B, C) est un triangle, on pose BC $= a$, AC $= b$, AB $= c$.
A' est le milieu du segment [BC], B' celui de [AC], C' celui de [AB].
Soit G l'isobarycentre du triangle (A, B, C).

1. Montrer que pour tout point M du plan,

$$M\mathrm{A}^2 + M\mathrm{B}^2 + M\mathrm{C}^2 = 3M\mathrm{G}^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

2. En calculant de deux façons différentes $(\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}})^2$ établir que :

$$2\overrightarrow{M\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{A}'} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{C}} = 3M\mathrm{G}^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

3. On considère les points communs aux cercles de diamètres [AA′] et [BC], montrer que, lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b et c.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère la suite u définie par :

$$n \in \mathbb{N}*, \quad u_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)\right] - \ln(n).$$

(ln désigne le logarithme népérien de base e).

1. Démontrer que $u_n = \dfrac{1}{n}\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]$.

2. **a.** Pour k entier, compris entre 0 et $n-1$, démontrer que :

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$

b. En déduire que :

$$u_n - \frac{1}{n}\ln(2) \leqslant \int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant u_n.$$

3. Déduire de ce qui précède un encadrement de u_n et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME **12 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité : 2 cm).
A est le point d'affixe 2i.
D est la droite d'équation $y = 2$.
Un point P décrivant la droite D, on se propose de construire l'ensemble S des points M et M' de la droite (OP) tels que PM $=$ PM′ $=$ PA.
(On appelle M le point de S situé entre O et P.)
On note $\Theta = \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)$ avec $\Theta \in]0\,;\,\pi[$.

1. Portugal, Grèce, Tunisie, Abou Dhabi

I. Placer le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, la droite D et le point A (fig. 1).

1. Construire les points M et M′ pour $\Theta = \dfrac{\pi}{6}$, $\Theta = \dfrac{\pi}{4}$, $\Theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\Theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

2. L'ensemble S contient-il A ? Contient-il d'autres points de D ?

3. Montrer que (OA) est axe de symétrie de S.

4. Soit Δ la médiatrice de [OA]. Montrer que si M appartient à S et à Δ le point P d'intersection de (OM) avec D vérifie PO = 2PA.
En déduire la construction sur la figure 1, de $S \cap \Delta$ puis de 4 points de S.

II. 1. Montrer que l'affixe z_p du point P est :

$$z_p = 2\frac{\cos(\Theta)}{\sin(\Theta)}.$$

2. Calculer les distances AP puis OM′ en fonction de Θ.
En déduire l'affixe z' du point M′ puis l'affixe z du point M.

3. a. Vérifier que l'ensemble des points M′ est la courbe paramétrée :

$$S_1 \left\{ \begin{array}{lcl} x_1(\Theta) & = & 2\dfrac{1+|\cos(\Theta)|}{\sin(\Theta)}\cos(\Theta) \\ y_1(\Theta) & = & 2(1+|\cos(\Theta)|) \end{array} \right. \qquad \Theta \in]0\,;\,\pi[.$$

b. Vérifier que l'ensemble des points M est la courbe paramétrée :

$$S_2 \left\{ \begin{array}{lcl} x_2(\Theta) & = & 2\dfrac{1-|\cos(\Theta)|}{\sin(\Theta)}\cos(\Theta) \\ y_2(\Theta) & = & 2(1-|\cos(\Theta)|) \end{array} \right. \qquad \Theta \in]0\,;\,\pi[.$$

III. On considère le domaine $\text{D} = [-\pi\,;\,0[\cup]0\,;\,\pi]$ de la droite réelle et la courbe paramétrée S' formée des points de coordonnées $\left(x(\Theta)\,;\,y(\Theta)\right)$ avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(\Theta) & = & 2\dfrac{1+\cos(\Theta)}{\sin(\Theta)}\cos(\Theta) \text{ si } |\Theta| \neq \pi \\ x(\pi) & = & x(-\pi) = 0 \\ y(\Theta) & = & 2(1+\cos(\Theta)) \end{array} \right. .$$

1. Comparer le point de coordonnées $(x(\Theta)\,;\,y(\Theta)$ et celui de coordonnées $(x(\Theta)\,;\,y(\Theta))$. Que peut-on en conclu e pour la courbe S' ?

2. Calculer la limite lorsque Θ tend vers π par valeurs inférieures de $x(\Theta)$ et la limite lorsque h tend vers 0 par valeurs supérieures de $\dfrac{x(\pi-h)}{h}$, donner la valeur de $y'(\pi)$.
Que peut-on en déduire ?
Calculer la limite lorsque Θ tend vers 0 par valeurs positives de $x(\Theta)$, de $y(\Theta)$.

3. a. Calculer, pour $|\Theta| \neq \pi$ la dérivée de la fonction x et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$2\frac{\cos^2(\Theta)-\cos(\Theta)-1}{1-\cos(\Theta)}.$$

b. Donner pour $\Theta \in]0\,;\,\pi]$ le tableau des variations des fonctions x et y.

c. Préciser pour $\Theta \in]0\,;\,\pi]$ l'intersection de la courbe S' avec l'axe $\left(\text{O}, \overrightarrow{v}\right)$ et la tangente à la courbe en ce point.

d. Préciser pour $\Theta \in]0\,;\,\pi]$ le point où la courbe S' admet une tangente parallèle à $\overrightarrow{v}$.

4. Montrer que le point $\left(x(\Theta)\,;\,y(\Theta)\right)$ représente soit un point M soit un point M′ ; préciser cette correspondance pour $\Theta \in \text{D}$.

5. Représenter graphiquement la courbe S' sur la figure 1 en indiquant les tangentes qui ont été calculées.