∽ Baccalauréat C juin 1990 ∽
Amiens - Lille - Rouen

EXERCICE 1 **4 points**

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par

$$f(z) = z^4 - z^3\sqrt{2} - 4z\sqrt{2} - 16.$$

1. Trouver les deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait :

$$f(z) = \left(z^2 + 4\right)\left(z^2 + az + b\right).$$

2. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.
3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ les images A, B, C, D des solutions de l'équation précédente, puis montrer que ces points sont sur un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère, dans le plan P rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ où l'unité de longueur est 6 cm, les points M_θ de coordonnées $(x\,;\,y)$ définies par

$$x = \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}, \quad y = \frac{\sin\theta}{2+\sin\theta}$$

avec θ élément de $[0\,;\,2\pi]$.

1. Calculer en fonction de θ la distance OM_θ et la distance de M_θ à la droite D d'équation $x = 1$.
2. En déduire que pour tout réel θ élément de $[0\,;\,2\pi]$, les points M_θ appartiennent à une même ellipse (E) dont on précisera l'excentricité, le grand axe ainsi que les coordonnées des quatre sommets et des points d'intersection avec l'axe des ordonnées.
3. Tracer l'ellipse (E).

PROBLÈME **11 points**

A

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction numérique f_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f_k(x) = k^2x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x.$$

On appelle $(\mathscr{C}_k)$ la courbe représentative de f_k dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ où l'unité de longueur est 5 cm.

1. Étudier les variations de f_k et dresser son tableau de variations. (On précisera les limites de f_k aux bornes de l'ensemble de définition.) ..
2. Soit M_k le point de $(\mathscr{C}_k)$ correspondant au minimum de f_k. Déterminer dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ une équation cartésienne de l'ensemble (A) des points M_k quand k décrit $]0\,;\,+\infty[$.
3. Tracer sur une même figure les courbes (A) et $(\mathscr{C}_1)$ après avoir précisé leur position relative.

B

Soit f la fonction numérique définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln x.$$

1. Tracer sur une nouvelle feuille, la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$ où l'unité de longueur est 5 cm. (On pourra utiliser le A. 1.)
2. Soit (Γ) le cercle de centre O de rayon 1 et A le point de coordonnées $(0\,;\,1)$. À tout point M de $(\mathscr{C})$ d'abscisse a, on associe le point H projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. La droite (AH) recoupe (Γ) en K.
   - **a.** Déterminer les coordonnées de K en fonction de a.
   - **b.** Démontrer que la droite (OK) est parallèle à la tangente en M à $(\mathscr{C})$.
   - **c.** En déduire un procédé géométrique pour construire la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ en un point M donné de cette courbe.

C

Dans cette partie, f désigne toujours la fonction définie au B.

1. On note λ un réel strictement positif.
   - **a.** À l'aide d'une intégration par parties calculer

     $$\int_{\lambda}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x,$$

     en déduire la valeur de $I(\lambda)=\displaystyle\int_{\lambda}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$.
   - **b.** Déterminer la limite I de $I(\lambda)$ quand λ tend vers zéro par valeurs supérieures.
2. Pour n naturel supérieur ou égal à 2, on pose :

   $$S_n=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=n}f\left(\frac{p}{n}\right).$$

   - **a.** En utilisant le sens de variations de f, démontrer que, pour p entier naturel vérifiant $1\leqslant p\leqslant n-1$, on a

     $$\frac{1}{n}f\left(\frac{p+1}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}f\left(\frac{p}{n}\right).$$

   - **b.** En déduire que :

     $$S_n-\frac{1}{n}f\left(\frac{p}{n}\right)\leqslant I\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant S_n,$$

     puis que :

     $$I\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant S_n\leqslant I\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$$

   - **c.** En déduire que :

     $$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{3}.$$