**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C Métropole septembre 1990

**EXERCICE 1** **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{e_1},\,\overrightarrow{e_2}\right)$.
On note $C$ le cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et A le point de $C$ d'affixe $R$.
Étant donné un entier $n \geqslant 2$, on note $r$ la rotation de centre O d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.
On considère la suite de points $(M_k)_{k\geqslant 0}$ de $C$ définie par la relation de récurrence $M_{k+1} = r\,(M_k)$ et la condition initiale $M_0 = \text{A}$.
On note $z_k$ l'affixe de $M_k$.

1. **a.** Pour tout $k \geqslant 0$, exprimer $z_{k+1}$ en fonction de $z_k$.
   **b.** En déduire l'expression de $z_k$ en fonction de $k$ et $n$.
   **c.** Comparer $M_n$ et $M_0$.
   **d.** Faire une figure lorsque $n = 16$ (on prendra $R = 4$ cm).
2. **a.** Prouver que, pour tout $k \geqslant 0$, $M_kM_{k+1} = 2R\sin\frac{\pi}{n}$.
   **b.** On note $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n$ le périmètre du polygone régulier $(M_0,\,M_1,\,\cdots,\,M_n)$.
   Déterminer la limite de $L_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement le résultat ainsi obtenu.

**EXERCICE 2** **5 points**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ACB tel que $\left(\overrightarrow{\text{AC}},\,\overrightarrow{\text{AB}}\right)$ ait pour mesure $\dfrac{\pi}{3}$.
On note $\Delta$ la droite orthogonale à (AB) passant par C et I le point de $\Delta$ tel que $\left(\overrightarrow{\text{AC}},\,\overrightarrow{\text{AI}}\right)$ ait pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$.
Enfin, on note $s$ la similitude directe de centre A telle que $s(\text{C}) = \text{I}$ et $s'$ la similitude directe de centre B telle que $s'(\text{I}) = \text{C}$.

1. **a.** Placer les points A, B, C et I sur la figure.
   **b.** Prouver que $r = s \circ s'$ est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   **c.** Déterminer le centre de cette rotation.
2. À tout point $M$ du plan, distinct des points A, B et C, on associe le point $N = s(M)$ et le point $P$ tel que $s'(P) = M$.
   **a.** Déterminer les angles $\left(\overrightarrow{\text{A}M},\,\overrightarrow{\text{A}N}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{B}P},\,\overrightarrow{\text{B}M}\right)$.
   **b.** On note $\sigma$ la similitude directe de centre A telle que $\sigma(\text{C}) = M$.
   Comparer $\sigma \circ s$ et $s \circ \sigma$.
   En déduire l'image de I par $\sigma$, puis déterminer l'angle $\left(\overrightarrow{M\text{A}},\,\overrightarrow{MN}\right)$.
   En déduire une construction géométrique de N.
   Placer les points $M$ et $N$ sur la figure.
   **c.** Construire de même $P$ (on pourra utiliser la similitude directe $\sigma'$ de centre B telle que $\sigma'(\text{I}) = P$).
3. Prouver que $\text{I}P = \text{I}N$ et que $\left(\overrightarrow{\text{I}P},\,\overrightarrow{\text{I}N}\right)$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

**PROBLÈME** **4 points**

**A**

On se propose d'étudier la fonction $f$ définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et } f(0) = 0.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, (unité graphique : 4 cm.)

**1. Variations de $f$**

**a.** Calculer la dérivée $f'$ de $f$ sur $[0~;~+\infty[$.

**b.** Déterminer la limite de $(1+u)\mathrm{e}^{-u}$ lorsque $u$ tend vers $+\infty$. En déduire que $f$ est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

**c.** Étudier le sens de variation de $f$.

**d.** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**2. Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit $\varphi$ la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$\varphi(u) = 1-(1+u)\mathrm{e}^{-u}.$$

**a.** Calculer la dérivée de $\varphi$.

**b.** Prouver que, pour tout $u \geqslant 0$ :

$$0 \leqslant \varphi'(u) \leqslant u.$$

**c.** En déduire que, pour tout $u \geqslant 0$

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant \frac{u^2}{2} \quad (1)$$

**3. Étude de $f$ au voisinage de $+\infty$**

**a.** À l'aide de (1), établir que, pour tout $x > 0$ :

$$0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{1}{2x}.$$

**b.** En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\Delta$ en $+\infty$ ; préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\Delta$.

**4. Étude de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point**

Soient $x$ un élément de $[0~;~+\infty[$ et $T_x$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x$.

**a.** Déterminer une équation cartésienne de $T_x$.

**b.** Montrer que $T_x$ coupe l'axe des abscisses $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath}\right)$ au point d'abscisse $\dfrac{x}{1+x+x^2}$.

**5. Construction de $\mathscr{C}$**

Construire $\mathscr{C}$ et $\Delta$. On précisera les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 1, $\frac{1}{3}$ et 3.

**B**

Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 1$.

**1. Convergence de $(u_n)$**

**a.** Établir que, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant x$ ; résoudre l'équation $g(x) = x$.

**b.** Prouver que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**c.** Montrer que $(u_n)$ converge, puis que sa limite $a$ est nulle.

**2. Comportement asymptotique de $(u_n)$**

**a.** Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $g\left(\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

**b.** Étudier les variations de $g$ sur $[0\,;\,1]$.

**c.** En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n-1} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

**d.** Pour tout entier $p \geqslant 0$, exprimer $\dfrac{1}{u_{p+1}} - \dfrac{1}{u_p}$ en fonction de $u_p$.

Établir que :

$$1 \leqslant \frac{1}{u_{p+1}} - \frac{1}{u_p} \leqslant 1 + \frac{1}{p+1}.$$

En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$ :

$$n \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

**e.** Pour tout entier $p \geqslant 2$, comparer $\dfrac{1}{p}$ et $\displaystyle\int_{p-1}^{p} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$ :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \leqslant \ln n.$$

**f.** Déterminer la limite de $nu_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.