∽ Baccalauréat C novembre 1990 ∾ Nouvelle-Calédonie

EXERCICE 1 **4 points**

Soit (ABC) un triangle rectangle en A, tel que AB = a et AC = $3a$ (où $a > 0$). On fera une figure en prenant $a = 2$ cm.

1. Construire le barycentre G du système $\{(\text{A},\ -5)(\text{B},\ 6)(\text{C},\ 2)\}$.
2. Calculer GA^2, GB^2 et GC^2 en fonction de a.
3. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M vérifiant

$$-5M\text{A}^2 + 6M\text{B}^2 + 2M\text{C}^2 = 12a^2.$$

EXERCICE 2 **4 points**

À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = 2z - \overline{z}.$$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On fera une figure en prenant 1 cm pour unité.
Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $\Omega(3\ ;\ 0)$ et de rayon 3.

1. **a.** Déterminer l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M d'affixe z tels que $|f(z) - 3| = 3$. Préciser la nature de $(\mathscr{E})$ et ses éléments caractéristiques : centre, axes, sommets, excentricité, foyers et directrices.

   b. Représenter $(\mathscr{E})$.
2. Soient P le point d'affixe $3\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et Q le point dont l'affixe α vérifie $f(\alpha) = 3\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

   a. Montrer que P appartient à $(\mathscr{C})$ et en déduire que Q appartient à $(\mathscr{E})$.

   b. Déterminer α et donner sa forme trigonométrique. Faire figurer P et Q sur le dessin.

PROBLÈME **12 points**

Partie I

On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y' - 2y = -\frac{2}{1 + \text{e}^{-2x}}.$$

1. Déterminer la solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln(2)$, et soit g la fonction définie par l'égalité

$$f(x) = \text{e}^{2x} g(x).$$

   a. Calculer $g(0)$.

   b. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.

   c. Montrer que f est solution de E si, et seulement si

$$g'(x) = \frac{-2\text{e}^{-2x}}{1 + 2^{-2x}}.$$

d. En déduire l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

Partie II

Étude sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right).$$

1. On pose : $h(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
   a. Étudier la limite de h en $+\infty$.
   b. Étudier le sens de variation de h.
   c. En déduire le signe de $h(x)$ pour tout x réel.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $h(x)$.
3. Étudier la limite de f en $+\infty$.
   Montrer que $f(x) = \mathrm{e}^{2x}\left[-2x+\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)\right]$.
   En déduire la limite de f en $-\infty$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé en prenant 5 cm pour unité. Préciser la tangente au point d'abscisse nulle.

Partie III

1. En remarquant que $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.
2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire (en cm^2) de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f définie au II., et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
   On donnera la valeur exacte de cette aire, ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie IV

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$ (où f est la fonction définie au II.).

1. Montrer que $f([0~;~1]) \subset [0~;~1]$, et en déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n \in [0~;~1]$.
2. Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est croissante. En déduire qu'elle converge.
3. Soit α sa limite. Montrer que $f(\alpha) = \alpha$ et $\alpha \in [0~;~1]$.
4. Grâce à la représentation graphique de f, donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.