Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Sportifs de haut-niveau ∽ septembre 1990

EXERCICE 1 — points

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 0, \\ u_1 & = & 1 \quad \text{et} \\ u_{n+1} & = & 7u_n + 8u_{n-1} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1. \end{array}\right.$$

1. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire s_n en fonction de n.

2. On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$t_n = v_{n+1} - v_n.$$

Exprimer t_n en fonction de s_n.

3. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n (on pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0 + \cdots + t_{n-1}$).
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

EXERCICE 2 — points

n désigne un entier strictement positif fixé.
On se propose de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi} |\sin(nt)|\,\mathrm{d}t.$$

Pour ceci on commence par étudier le signe de $sin(nt)$ sur l'intervalle $[0~;~\pi]$

1. Soit un entier $k \geqslant 0$ et soit l'intervalle $J_k = \left[k\frac{\pi}{n}~;~(k+1)\frac{\pi}{n}\right]$:

- **a.** t désignant un élément de J_k, donner un encadrement du réel nt.
- **b.** En déduire que $\sin(nt)$ garde un signe constant lorsque t décrit J_k.
  Préciser ce signe lorsque $k = 2\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}$), puis lorsque $k = 2\ell + 1$ ($\ell \in \mathbb{N}$).
- **c.** Calculer $\int_{\frac{k\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} |\sin(nt)|\,\mathrm{d}t$.

2. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi} |\sin(nt)|\,\mathrm{d}t$.
(On pourra utiliser 1. c. et la relation de Chasles sur les intégrales.)

PROBLÈME — points

Le plan est rapporté à un repère direct $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
On note x et y les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$x(t) = \mathrm{e}^t \cos t \quad \text{et} \quad y(t) = \mathrm{e}^t \sin t.$$

Pour tout réel t, on note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t)~;~y(t))$ et on note $\overrightarrow{v(t)}$ le vecteur de composantes $\left(x'(t)~;~y'(t)\right)$.
L'objectif du problème est l'étude de quelques propriétés géométriques de la courbe Γ décrite par le point $M(t)$.

1. **Étude de la tangente en un point**

   a. Étant donné un réel t, montrer que $M(t)$ est différent de O, et calculer les affixes $Z(t)$ et $W(t)$ des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M(t)}$ et $\overrightarrow{v(t)}$ respectivement.

   Montrer que le nombre complexe $U = \dfrac{W(t)}{Z(t)}$ est indépendant de t.

   Déterminer le module et un argument de U.

   b. Étant donné un réel t, on note $B(t)$ le point défini par $\overrightarrow{M(t)B(t)} = \overrightarrow{v(t)}$.

   c. Déduire de ce qui précède une mesure de l'angle

Montrer que la tangente en $M(t)$ à Γ est l'image de la droite $(\mathrm{O}M(t))$ par la rotation de centre $M(t)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

2. **Intersection de Γ avec les cercles de centre O, et construction point par point**

   a. Pour tout réel t, calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M(t)}$.

   b. Étant donné un réel $R > 0$, montrer que Γ a un unique point d'intersection avec le cercle $\mathscr{C}_R$ de centre O et de rayon R et calculer, en fonction de R, les coordonnées de ce point d'intersection.

   c. Calculer, avec deux décimales exactes, les coordonnées des points d'intersection de Γ avec les cercles $\mathscr{C}_R$ lorsque R prend les quinze valeurs suivantes :

   0,05 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 ; 5 ; 5,5 ; 6 ; 6,5.

   Construire ces points sur une figure en prenant l'unité de longueur égale à 2 cm.

   Sur cette même figure, construire les tangentes à Γ en les cinq points correspondant à $R = 1$; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Achever, sans justification, la construction de Γ.

3. **Similitudes directes de centre O qui conservent Γ**

   a. Soit s une similitude directe de centre O d'angle θ et de rapport λ.

   On suppose que $s(M(0))$ appartient à Γ, et on écrit $s(M(0)) = M(t)(t \in \mathbb{R})$.

   Montrer que $\lambda = \mathrm{e}^{t}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $\lambda = \mathrm{e}^{\theta+2k\pi}$.

   b. Étant donné un réel θ et un entier relatif k, on note $S_{\theta,\,k}$ la similitude directe de centre O, d'angle θ et de rapport $\mathrm{e}^{\theta+2k\pi}$.

   i. Donner l'écriture complexe de $S_{\theta,\,k}$.

   ii. Montrer que, pour tout réel t, il existe un réel t' qu'on précisera, tel que $S_{\theta,\,k}(M(t)) = M(t')$.

   iii. Quelle est l'image de Γ par $S_{\theta,\,k}$?

   c. Déterminer toutes les similitudes directes de centre O qui conservent Γ.

   d. Déterminer les rapports de toutes les homothéties de centre O qui conservent Γ.