

Durée : 4 heures

∞ **Baccalauréat C Nouvelle Calédonie** ∞  
**novembre 1993**

**EXERCICE 1**

**5 points**

On se propose de calculer l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx.$$

1. Calculer les deux intégrales :

$$A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx.$$

$$B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx.$$

2. Déterminer trois nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout nombre réel  $t$  positif ou nul on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \quad (1).$$

3. En posant  $t = e^x$  dans l'égalité (1), calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx.$$

4. a. À l'aide d'une intégration par parties exprimer  $J$  en fonction de  $I$ .  
b. En déduire la valeur de  $I$ . À l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de  $J$  à  $10^{-2}$  près.

**EXERCICE 2**

**4 points**

**Enseignement obligatoire**

On considère, dans le plan orienté rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , la courbe  $(\mathcal{C})$  d'équation

$$xy - 2x - 3y - 1 = 0,$$

et la transformation  $f$  du plan, qui, au point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que

$$z' = \frac{1-i}{2}z - 2 + 2i.$$

1. Montrer que  $f$  admet un point invariant unique que l'on déterminera.  
Reconnaître la nature de la transformation  $f$  et donner ses éléments caractéristiques.
2. Exprimer les coordonnées  $(x; y)$  de  $M$  en fonction des coordonnées  $(x'; y')$  de  $M'$ .
3. Montrer que l'image de la courbe  $(\mathcal{C})$  par la transformation  $f$  est la courbe  $(\mathcal{C}')$  d'équation

$$x'^2 - y'^2 - x' + 3y' - 9 = 0.$$

4. Montrer que la courbe  $(\mathcal{C}')$  est une hyperbole dont on donnera, dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , les coordonnées du centre et des sommets. Représenter  $(\mathcal{C}')$  dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**PROBLÈME****11 points**

*Le but de ce problème est l'étude d'une fonction et le calcul ou l'encadrement de quelques nombres qui lui sont attachés.*

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x + \frac{1}{8} \ln x - x \ln x.$$

On note  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  en prenant 2 cm comme unité graphique.

**Partie A****Étude du signe de la dérivée de  $f$** 

1. Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$ .
2. Prouver que l'équation  $f'(x) = 0$  admet une solution unique.  
On note  $\alpha$  cette solution.  
Justifier que  $1 \leq \alpha \leq 1,2$ .
3. Déterminer le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**Partie B****Étude et représentation graphique de la fonction  $f$** 

1. Calculer les limites de  $f$  en zéro et en  $+\infty$ . Donner le tableau des variations de  $f$ .
2. Prouver que :

$$0 \leq f(\alpha) - f(1) \leq f'(1) \cdot (\alpha - 1) \leq 0,2 \cdot f'(1).$$

En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ .

3. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ .

**Partie C****Approximation de  $\alpha$** 

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = e^{\frac{1}{8x}}.$$

1. Prouver que  $g(\alpha) = \alpha$ .  
Déduire du sens de variation de  $g$  que pour tout élément  $x$  de l'intervalle  $[1; 1,2]$ ,  $g(x)$  appartient encore à cet intervalle.
2. Soit  $(u_n)$  la suite d'éléments de  $[1; 1,2]$  définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = g(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

- a. Prouver que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,15 |u_n - \alpha|.$$

- b.** Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ .
- c.** Établir que :

$$|u_6 - \alpha| \leq 10^{-5}.$$

Calculer  $u_6$  à l'aide de la calculatrice (on donnera la partie entière et les cinq premières décimales).