



Options : C

Code matière : 009

Epreuve de : MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

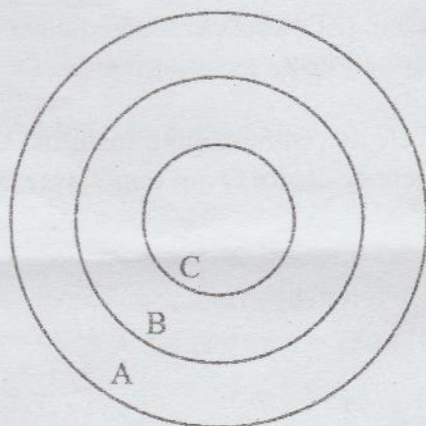
Coefficient : 5

NB : L'utilisation d'une calculatrice scientifique non programmable est autorisée.  
L'exercice et les deux problèmes sont obligatoires.

### EXERCICE (4 points)

#### Partie A

Dans un concours de tir, la cible circulaire se divise en trois zones: A, B et C.



Chaque tir atteint nécessairement l'une des trois zones A, B, et C.

$P_A$ ,  $P_B$  et  $P_C$  sont respectivement les probabilités d'atteindre les zones A, B et C.

Sachant que  $P_C = \frac{1}{6}$  et  $P_A$ ,  $P_B$  et  $P_C$  forment, dans cet ordre, une progression arithmétique.

1°) Calculer  $P_A$  et  $P_B$ . (0,5pt)

2°) On effectue quatre tirs d'une manière indépendante. Calculer la probabilité d'atteindre au moins une fois la zone C. (0,5pt)

3°) Un joueur tire jusqu'à ce que la zone C soit atteinte.  
Calculer la probabilité de l'événement E: « Le jeu s'arrête au 3<sup>ème</sup> tir ». (0,5pt)

4°) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $P_n$  la probabilité pour que le jeu s'arrête au n<sup>ème</sup> tir.  
Ecrire  $P_n$  en fonction de n. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$ . (0,5pt)

#### Partie B

1- Soit x et y deux entiers naturels.

Démontrer que :  $(x + 6y)^2 - x^2$  est divisible par 12 et que  $(x + 6y)^4 - x^4$  est divisible par 24. (1pt)

2- Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  :  $3x \equiv 2 \pmod{7}$ . (0,5pt)

3- Déterminer la base b du système de numération dans lequel :  $(\overline{12})_b \times (\overline{22})_b = (\overline{314})_b$ . (0,5pt)

/...



## PROBLEME1 (7 points)

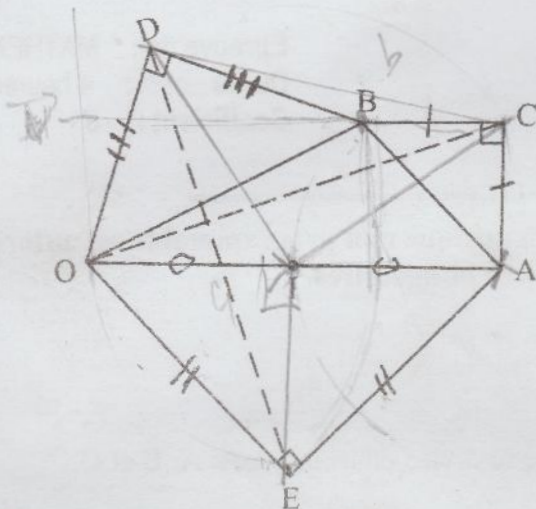
Les parties I et II sont indépendantes.

On considère un triangle quelconque AOB.

AOE est un triangle direct isocèle et rectangle en E

BAC est un triangle direct isocèle et rectangle en C

OBD est un triangle direct isocèle et rectangle en D



On se propose de démontrer que les droites (OC) et (ED) sont perpendiculaires et que  $OC = ED$ .

**PARTIE I : Méthode 1 : Utilisation des transformations.**

On note :

- $S_1$  la similitude plane directe de centre A qui transforme C en B.
- $S_2$  la similitude plane directe de centre O qui transforme B en D.
- $f = S_2 \circ S_1$ .

1-a) Déterminer le rapport et l'angle de chacun des transformations  $S_1$  et  $S_2$ .

(1pt)

b) Prouver que  $f$  est une rotation dont on précisera l'angle.

(0,5pt)

2- Déterminer l'image de I par  $S_1$  et celle de E par  $S_2$ .

(0,5pt)

En déduire que I est invariant par  $f$ .

(0,25pt)

3-On appelle R la rotation de centre I et d'angle  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

a) Déterminer  $R(O)$  et  $R(C)$

(0,75pt)

b) En déduire que (OC) et (ED) sont perpendiculaires et que  $OC = ED$ .

(0,5pt)

**PARTIE II : Méthode 2 : Utilisation des nombres complexes.**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  avec  $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$ .

On note  $b$  l'afixe de B.

1) Calculer en fonction de  $b$  l'afixe de C et l'afixe de D.

(1pt)

2) Calculer l'afixe  $Z_E$  de E.

(0,5pt)

3-a) Démontrer que  $\frac{Z_D - Z_E}{Z_C - Z_O} = i$ .

(1pt)

b) En déduire que (OC) et (ED) sont perpendiculaires et que  $OC = ED$ .

(1pt)

/...

**PROBLEME2 ( 9 points )**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)e^x & \text{si } x < 1 \\ x-1 + \ln \frac{2x}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 1cm.

**Partie I**

1-Prouver que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$ .

(0,5pt)

2- a) Vérifier que pour tout  $x > 1$ :  $\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1 + \frac{\ln x}{x-1} - \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1}$

(0,25pt)

Démontrer que  $f$  est dérivable à droite en 1 et que  $f'_d(1) = \frac{3}{2}$ .

(0,25pt)

b) Etudier la dérivabilité à gauche de  $f$  en  $x_0 = 1$ .

(0,25pt)

3- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(0,5pt)

4- a) Etudier le sens de variation de  $f$  sur son domaine de définition.

(1pt)

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

(0,5pt)

5- On pose  $\varphi(x) = f(x) - x + 1 - \ln 2$ .

Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ . Que signifie ce résultat pour la courbe (C)?

(0,75pt)

6- Tracer les demi-tangentes au point d'abscisse  $x_0 = 1$ , l'asymptote et la courbe (C)

(1pt)

**Partie II**

1-On considère l'équation différentielle (E):  $y' - y = (-2x + 1)e^x$

Soit  $g$  une solution de (E), démontrer que toute fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(x) = e^{-x}g(x)$

vérifie  $\varphi'(x) = -2x + 1$ . En déduire la solution de (E) qui prend la valeur 1 en  $x=0$ . (1,25pts)

2- Résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'équation  $\sqrt{3} \cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0$

(0,5pt)

3- Soit la suite numérique  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$$

a) Calculer  $I_1$ . Interpréter géométriquement ce résultat.

(0,5pt)

b) Trouver une relation de récurrence entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$ .

En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ :  $I_n = e - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ .

(1pt)

c) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ :  $\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$ .

(0,5pt)

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right)$ .

(0,25pt)

On donne:  $e^{-3} \approx 0,05$  ;  $e^{-2} \approx 0,14$  ;  $e^{-1} \approx 0,37$ ;

$\ln 2 \approx 0,7$  et  $\ln 3 \approx 1,1$

\*\*\*\*\*