DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION 2000

SERIE : D

Code Matière : 009

Epreuve de : *Mathématiques*

Durée : 3 heures 15 minutes

Coefficient : 4

Exercice 1 5 points

$\mathcal{P}$ est un plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(6-i)\,z+11-3i=0$. *(0,5 pt)*

   b. Déterminer les nombres complexes z et z' tels que :
   $$\begin{cases} 2\,z-z'=6-5i \\ -z+z'=3i. \end{cases}$$ *(0,5 pt)*

Dans tout ce qui suit, on note par A, B, C et D les points d'affixes respectives $a=3+i$, $b=3-2i$, $c=6-2i$ et $d=6+i$.

2. a. Placer dans $\mathcal{P}$ les quatre points A, B, C et D. *(0,5 pt)*

   b. Démontrer que le triangle (BAD) est isocèle et rectangle en A, et le triangle (BCD) est isocèle et rectangle en C. *(0,75 pt)*

   c. En déduire que les quatre points A, B, C et D se trouvent sur un même cercle (Γ) dont on précisera le centre Ω et le rayon. Tracer (Γ) sur la figure précédente. *(0,75 pt)*

3. Soit S la similitude plane directe de centre A et qui transforme B en C.

   a. Préciser les éléments caractéristiques de S. *(1 pt)*

   b. Construire sur la figure précédente le transformé de ABCD par S. *(1 pt)*

Exercice 2 5 points

N.B. : On exprimera les résultats sous forme décimale à 10^{-2} près.

Le tableau suivant indique les variations du chiffre d'affaires y_i d'une entreprise selon les frais de publicité x_i (x_i et y_i sont exprimés en millions de francs malagasy) de 1992 à 1999.

Années	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
x_i	2	2,3	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1
y_i	52	59	60	65	70	72	73	75

On donne :

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 24{,}40\ ;\ \sum_{i=1}^{8} y_i = 526\ ;\ \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 78{,}20\ ;\ \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 35048\ ;\ \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 1645{,}10.$$

1. a. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,,\,y_i)$.
   (Unité graphiques :
   - 2 cm représente 1 million de francs malagasy sur l'axe des abscisses.
   - 1 cm représente 10 millions de francs malagasy sur l'axe des ordonnées). *(1 pt)*

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point. *(0,75 pt)*

2. a. Montrer que le coefficient de corrélation linéaire associé à cette série statistique est : $r \approx 0{,}98$. *(1,5 pt)*

   b. Interpréter ce résultat. *(0,25 pt)*

   c. Par la méthode des moindres carrés, donner l'équation de la droite de régression de y en x et tracer cette droite. *(0,75 pt)*

3. a. Montrer que $x_1, x_2, \ldots, x_8$ constituent les 8 premiers termes d'une suite arithmétique (x_n) dont on précisera la raison. *(0,25 pt)*

   b. Donner une estimation du chiffre d'affaires de cette entreprise en 2002. *(0,5 pt)*

Exercice 3 — 5 points

N.B. : – Les questions 1. et 2. sont indépendantes.
- On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une urne contient des boules indiscernables au toucher : rouges, vertes et noires.

1. On suppose qu'il y ait 12 boules dans l'urne dont : 3 rouges, 4 noires et 5 vertes. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.
   a. Déterminer le nombre de tirages possibles. *(0,5 pt)*
   b. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   A : « Avoir 3 boules noires ». *(0,5 pt)*
   B : « Avoir 3 boules de même couleur ». *(0,5 pt)*
   C : « Avoir au moins deux boules noires ». *(0,5 pt)*
   D : « Avoir au plus deux boules rouges ». *(0,5 pt)*
2. On suppose qu'il y ait 25% de boules rouges dans l'urne. On appelle « gain » l'obtention d'une boule rouge lors d'un tirage d'une boule de l'urne. L'expérience consiste à tirer au hasard et successivement 4 boules de l'urne en remettant dans l'urne chaque boule tirée avant de tirer une autre. Soit X la variable aléatoire qui à chaque expérience associe le nombre de gains.
   a. Vérifier que l'univers image de X est $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. *(0,25 pt)*
   b. Montrer que la probabilité d'avoir 3 gains est égale à $\frac{3}{64}$. *(0,5 pt)*
   c. Déterminer la loi de probabilité de X. *(1 pt)*
   d. Définir la fonction de répartition F de X. *(0,5 pt)*
   e. Si n est le nombre de boules rouges, $3n - 7$ le nombre de boules vertes et $2n - 1$ le nombre de boules noires dans l'urne, calculer n. *(0,25 pt)*

Exercice 4 — 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

On note par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 2 cm.

1. Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(x) = (-x + 2)\,e^x - 1$.
   a. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de h). *(0,5 pt)*
   b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0 ; +\infty[$. Vérifier que α est compris entre $\frac{3}{2}$ et 2. *(0,5 pt)*
   c. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $h(x)$. *(0,5 pt)*
2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat. *(0,5 pt)*
   b. Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 1$. (On admet que $e^x - x > 0$ sur $[0 ; +\infty[$). *(0,5 pt)*
3. a. Montrer que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{\left(e^x - x\right)^2}$. *(0,5 pt)*
   b. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ et donner le tableau de variation de f. *(0,5 pt)*
   c. Tracer $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ dans un même repère. (On prendra $\alpha = 1{,}84$ et $f(\alpha) = 1{,}20$). *(0,5 pt)*
4. Soit F la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $F(x) = \ln(e^x - x)$.
   a. Calculer $F'(x)$. *(0,5 pt)*
   b. On note par $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe $(x'Ox)$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$. Utiliser l'égalité $h(\alpha) = 0$ pour montrer que $\mathscr{A}(\alpha) = 4\ln\left[\frac{(1-\alpha)^2}{2-\alpha}\right]$ cm². *(0,5 pt)*