

SERIE : D

Code Matière : 09

Epreuve de : **MATHEMATIQUES**
Durée : 3 heures 15 minutes
Coefficient : 4

N.B. : Les QUATRE Exercices sont obligatoires.

Exercice - 1

(5 points)

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 - 7z^2 + (19 + 5i)z - 18 - 30i$.

- Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure αi où α est un réel que l'on déterminera. (0,5 pt)
 - Mettre $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z - \alpha i)(z^2 + az + b)$ où a et b sont des nombres complexes que l'on déterminera. (0,5 pt)
 - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$. (0,5 pt)

- Dans le plan complexe (\mathbb{S}^0) muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 4 + i$, $z_B = 3 - 3i$ et $z_C = 2i$.

- Placer les points A, B, C. (0,25 pt)

- On pose $Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. Donner la forme trigonométrique de Z . (1 pt)

- En déduire la nature du triangle ABC. (0,25 pt)

- On considère la transformation S du plan (\mathbb{S}^0) dans (\mathbb{S}^0) , qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe

$$z' = x' + iy' \text{ telle que : } \begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y \end{cases}$$

- Donner l'expression complexe de S . (0,5 pt)

- Donner la nature et les éléments caractéristiques de S . (1 pt)

- Soit le cercle (\mathcal{C}) de centre I $(1; -1)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$.

Déterminer la nature et les éléments géométriques du transformé (\mathcal{C}') de (\mathcal{C}) par la transformation S . (0,5 pt)

Exercice - 2

(5 points)

N.B. : On exprimera les résultats sous forme décimale à 10^{-2} près.

Le tableau suivant indique les variations des dépenses mensuelles y_i de la famille Rakoto lors des 7 premiers mois de l'année 2000. (x_i désigne le rang du mois et y_i est exprimé en milliers de francs malagasy).

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	375	387	385	393	400	410	415

$$\text{On donne : } \sum_{i=1}^7 x_i = 28 ; \sum_{i=1}^7 y_i = 2.765 ; \sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140 ; \sum_{i=1}^7 y_i^2 = 1.093.393 ; \sum_{i=1}^7 x_i y_i = 11.241$$

- Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal. (1 pt)

- Sur l'axe des abscisses, choisir 1 cm pour unité graphique.

- Sur l'axe des ordonnées, placer 370 à l'origine puis choisir 1 cm pour représenter 10.000-francs.

- Calculer les coordonnées du point moyen G. (0,5 pt)

- Calculer le coefficient de corrélation linéaire r . (1,5 pt)

- Interpréter ce résultat. (0,5 pt)

- Par la méthode des moindres carrés, donner l'équation de la droite de régression (\mathcal{S}) de y en x . Tracer cette droite. (0,75 + 0,25 pt)

- En utilisant la droite (\mathcal{S}) , donner une estimation des dépenses de la famille Rakoto pour le mois d'Octobre 2000. (0,5 pt)

Exercice - 3

(5 points)

Une urne contient 12 jetons indiscernables au toucher dont 6 jaunes, 3 verts et 3 rouges.

1. On tire au hasard et simultanément 3 jetons de l'urne.

Soit X la variable aléatoire définie de la façon suivante :

- X prend la valeur 1 si les 3 jetons tirés sont de la même couleur.
- X prend la valeur -2 si 2 et 2 seulement des 3 jetons tirés sont de la même couleur.
- X prend la valeur 0 si les 3 jetons tirés sont de 3 couleurs différentes.

- a) Déterminer la loi de probabilité X .

(1,5 pt)

- b) Définir la fonction de répartition F de X et la représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Unités : $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$; $\|\vec{j}\| = 11 \text{ cm}$.

(1 pt)

2. On répète 5 fois de suite et de façon indépendante l'épreuve qui consiste à tirer au hasard et simultanément 3 jetons.

A chaque épreuve, on marque 1 point si l'événement $\{X = 1\}$ est réalisé sinon on marque 0 point.

Soit Y la variable aléatoire égale au total des points marqués à l'issue des 5 épreuves.

- a) Déterminer la loi de probabilité de Y .

(1 pt)

- b) Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y .

(0,5 pt)

3. On enlève un jeton vert du contenu initial de l'urne. On tire au hasard et simultanément 2 jetons que l'on ne remet plus dans l'urne puis on tire de nouveau au hasard et simultanément 2 jetons.

Calculer la probabilité d'obtenir 2 jetons verts au deuxième tirage.

(1 pt)

Exercice - 4

(5 points)

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2-x)e^x - 2x - 2$.

On note par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = (1-x)e^x - 2$.

- a) Étudier les variations de g (on ne demande pas la courbe représentative de g).

(1 pt)

- b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(0,25 pt)

2. a) Étudier les variations de f en utilisant 1.b).

(1 pt)

- b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -2x - 2$ est asymptote à (\mathcal{C}) .

(0,25 pt)

- c) Étudier suivant les valeurs de x , la position relative de (\mathcal{C}) par rapport à (D) .

(0,5 pt)

- d) Dédire de 1.a) que l'origine O est un point d'inflexion pour (\mathcal{C}) et donner l'équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point O .

(0,5 pt)

- e) Construire (T) , (D) et (\mathcal{C}) .

(1 pt)

3. Soit \mathcal{A} l'aire du domaine plan limité par la courbe (\mathcal{C}) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire \mathcal{A} .

(0,5 pt)

