MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION 2002

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Série | : | D | Epreuve de | : | MATHEMATIQUES |
| | | | Durée | : | 3 heures 15 minutes |
| Code Matière | : | 009 | Coefficient | : | 4 |

N.B. : Les QUATRE exercices sont obligatoires.

EXERCICE 1 ( 5 points )

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par : $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i$.

1°/ a) - Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure $\alpha i$ où $\alpha$ est un réel que l'on déterminera. ( 0,5 pt )

b) - Mettre $P(z)$ sous la forme $(z - \alpha i)(z^2 + az + b)$ où a et b sont des nombres complexes que l'on déterminera. ( 0,5 pt )

c) - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. ( 0,5 pt )

2°/ Dans le plan complexe $(\mathscr{P})$ muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 3 + i$ ; $z_B = 2i$ ; $z_C = 2 - 2i$.

a) – Placer les points A, B, C (On complètera cette figure au fur et à mesure des questions). ( 0,5 pt )

b) – On pose $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Donner la forme trigonométrique de Z. ( 0,5 pt )

c) – En déduire la nature du triangle ABC. ( 0,5 pt )

d) – Calculer l'affixe du point E tel que ABEC soit un carré. ( 0,25 pt )

e) – Calculer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. ( 0,25 pt )

3°/ Soit S la similitude plane directe transformant A en C et laissant invariant le point B.

a) – Déterminer l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques. ( 0,5 + 0,5 pt )

b) – Déterminer et construire l'image par S du quadrilatère ABED. ( 0,5 pt )

EXERCICE 2 ( 5 points )

Le tableau suivant indique, pour une même distance, les variations des quantités $y_i$ d'essence consommées de certaines voitures suivant leurs puissances $x_i$ ($x_i$ est exprimé en chevaux et $y_i$ en litres).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 |
| $y_i$ | 10 | 12 | 20 | 25 | 28 | 30 | 32 | 35 |

On donne : $\sum_{i=1}^{8} x_i = 48$ ; $\sum_{i=1}^{8} y_i = 192$ ; $\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 324$ ; $\sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 5202$ ; $\sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 1287$.

1°/ a) – Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal. ( 1 pt )

※ 1 cm sur l'axe des abscisses représente 1 cheval.

※ 1 cm sur l'axe des ordonnées représente 5 litres.

b) – Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point. ( 0,75 pt )

2°/ a) – Calculer le coefficient de corrélation linéaire associé à cette série statistique. ( 1,5 pt )

b) – Interpréter ce résultat. ( 0,25 pt )

3°/ a) – Par la méthode des moindres carrés, donner l'équation de la droite de régression (D) de y en x. Tracer cette droite. ( 0,75 + 0,25 pt )

b) – Donner une estimation de la quantité d'essence consommée par une voiture de puissance de 12 cheveux. ( 0,5 pt )

EXERCICE 3 ( 5 points )

Une urne contient dix jetons indiscernables au toucher dont :

- cinq jetons blancs numérotés : 2, 4, 6, 8, 10.
- cinq jetons noirs numérotés : 1, 3, 5, 7, 9.

L'épreuve $\mathscr{E}$ consiste à tirer au hasard et successivement trois jetons de l'urne sans remettre dans l'urne le jeton qui a été tiré.

1°/ a) – Quel est le nombre de triplets que l'on peut obtenir ? ( 0,5 pt )

b) – Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Les jetons tirés sont de même couleur ». ( 0,5 pt )

B : « Les numéros des jetons tirés forment dans l'ordre une progression arithmétique de raison 2 ». ( 0,5 pt )

C : « Les numéros des jetons tirés forment dans l'ordre une progression géométrique de raison 2 ». ( 0,5 pt )

2°/ Soit X la variable aléatoire qui à chaque épreuve, désigne le rang du premier jeton noir tiré. (On admet que ce rang est 0 s'il n'y a aucun jeton noir tiré).

a) – Déterminer la loi de probabilité de X. ( 1 pt )

b) – Définir la fonction de répartition de X et la représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$. Unités : $\|\vec{i}\| = 1$ cm ; $\|\vec{j}\| = 9$ cm. ( 0,25 + 0,25 pt )

3°/ On répète 5 fois de suite et de manière indépendante l'épreuve $\mathscr{E}$. A chaque épreuve, on marque 1 point si l'on tire un jeton noir au premier coup sinon on marque 0 point.

Soit Y la variable aléatoire égale au total des points marqués à l'issue des 5 épreuves.

a) – Déterminer la loi de probabilité de Y. ( 0,5 pt )

b) – Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y. ( 0,25 + 0,25 pt )

c) – Calculer la probabilité pour que l'on marque au moins 1 point à l'issue des 5 épreuves. ( 0,5 pt )

EXERCICE 4 ( 5 points )

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = (x + 1)\ln|x|$. On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1°/ a) – Déterminer le domaine de définition Df de f. ( 0,25 pt )

b) – Calculer les limites aux bornes de Df. ( 0,25 pt )

2°/ Soit $g(x) = \dfrac{x+1}{x} + \ln|x|$.

a) – Etudier les variations de g (on ne demande pas la courbe représentative de g). ( 0,5 pt )

b) – Calculer g (– 1) et préciser le signe de g(x) suivant les valeurs de x. ( 0,5 pt )

3°/ a) – Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de g(x). ( 0,5 pt )

b) – Dresser le tableau de variation de f. ( 0,5 pt )

4°/ a) – Montrer que le point I (1, 0) est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathscr{C})$. ( 0,25 pt )

b) – Donner une équation de la tangente ( T ) à $(\mathscr{C})$ au point I. ( 0,25 pt )

c) – Etudier les branches infinies de $(\mathscr{C})$. ( 0,25 pt )

d) – Construire ( T ) et $(\mathscr{C})$. ( 0,25 + 0,5 pt )

5°/ Calculer, en cm², l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par $(\mathscr{C})$, l'axe (x'Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. (On pourra faire une intégration par parties). ( 1 pt )