Direction de l'Enseignement Supérieur

Service de la Scolarité et de l'Evaluation

Série : D

Code Matière : 009

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION 2004

Epreuve de	:	MATHEMATIQUES
Durée	:	3 Heures 15mn
Coefficient	:	4

N.B. : - Les **DEUX** exercices et le **PROBLEME** sont obligatoires.
- Machine à calculer autorisée.

EXERCICE 1 : (5 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z. (1pt)

$$z^2-(4+5i)z-1+7i=0.$$

2°) Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 1cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=1+i$; $z_B=3+4i$ et $z_C=4-i$.

a/ Déterminer l'expression complexe associée à la similitude plane directe S telle que : (1pt)

S(A) = B et S(B) = C.

b/ Préciser les éléments caractéristiques de S. (0,75pt)

3°) On note par I le milieu du segment [B C].

a/ Calculer l'affixe z_I de I. (0,25pt)

b/ Placer les points A , B , C et I dans le plan complexe $(\mathcal{P})$ (0,5pt)

c/ Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M d'affixe z vérifiant : (1pt)

$$\left|z-\frac{7+3i}{2}\right|=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

d/ Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par S. (0,5pt)

EXERCICE 2 : (5 points)

Une urne U_1 contient six boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et trois boules numérotées 2.

Une autre urne U_2 contient cinq boules : deux boules numérotées 0, une boule numérotée 1 et deux boules numérotées 2.

Les boules sont indiscernables au toucher.

1°) On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne U_1.

Calculer les probabilités des événements suivants :

A: << La somme des numéros notés est égale à 4>> (0,5pt)

B: << Parmi les trois boules tirées, deux boules exactement sont numérotées par 2>> (0,5pt)

C: << Le produit des numéros notés sur les trois boules tirées, est différent de 0 >> (0,5pt)

D: << Les trois boules obtenues portent le même numéro >> (0,5pt)

2°) On remet l'urne U_1 à sa condition initiale. On tire une boule de l'urne U_1 , puis on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne U_2. On suppose que les événements élémentaires sont équiprobables. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque éventualité, associe le produit des numéros notés sur les trois boules obtenues.

a/ Vérifier que l'univers image de X est égal à l'ensemble { 0 , 2, 4, 8 }. (0,5pt)

b/ Montrer que $P(X=0)=\dfrac{3}{4}$ et $P(X\geq 4)=\dfrac{11}{50}$. (0,25+0,5pt)

c/ Calculer la probabilité de l'événement : (X = 2). (0,25pt) d/ Compléter le tableau des valeurs ci-dessous : *(0,25+0,25pt)*

k	0	2	4	8
P (X= k)	$\frac{3}{4}$			

e/ Montrer que $E(X) = \frac{16}{15}$, E(X) étant l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. *(0,25pt)*

f/ Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X.

On utilisera pour la représentation graphique de F un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(On prendra comme unités : 1cm sur l'axe des abscisses et 6cm sur l'axe des ordonnées) *(0,25+0,5pt)*

(N.B : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible).

PROBLEME (10 points) :

Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$

On note par ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2cm).

1°) On donne la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

a/ Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ *(0,25+0,25)*

b/ Pour tout x > 0, calculer g'(x) et étudier son signe. *(1+0,5pt)*

c/ Dresser le tableau de variation de g. *(1pt)*

d/ Montrer qu'il existe un et un seul nombre réel α vérifiant $g(\alpha) = 0$ avec $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ *(1pt)*

[1, 1]

2°) a/ Pour tout x > 0, calculer $f'(x)$. *(0,5pt)*

b/ Pour tout x > 0, montrer l'égalité $f'(x) = e^x g(x)$. *(0,5pt)*

c/ Calculer $f'(\alpha)$. *(0,25pt)*

d/ Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $\left(\text{On pourra utiliser l'égalité } f(x) = \frac{e^x}{x}(x \ln x + 1)\right)$. *(0,25+0,25)*

e/ Dresser le tableau de variation de la fonction f. *(0,75pt)*

3°) a/ Donner une équation de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 1. *(0,5pt)*

b/ Construire ($\mathcal{C}$) et (T) dans un même repère. *(1+0,5pt)*

4°) On pose pour tout x > 0, $h(x) = e^x \ln x$
Montrer que h est une primitive de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$. *(0,5pt)*

5°) Soit $I = \int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx$ où α est le réel défini à la question 1°) d/

a/ Montrer que $I = e^{\alpha}\left(\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right)$ *(0,5pt)*

b/ Interpréter géométriquement l'intégral I. *(0,5pt)*

On donne $\ln 2 \simeq 0{,}7$ $\quad \alpha \simeq 0{,}9$ $\quad f(\alpha) \simeq 2{,}1$ $\quad e \simeq 2{,}7$