~~m~~ C

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Service de la Scolarité et de l'Evaluation

Série : D

Code Matière : 009

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION 2005

Epreuve de : MATHEMATIQUES

Durée : 3 Heures 15mn

Coefficient : 4

※ ※

N.B : - Le candidat doit traiter les DEUX Exercices et le Problème.
- Machine à calculer autorisée.

EXERCICE 1 *(5 points)*

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On note A le point d'affixe i.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation à une inconnue z suivante : $\dfrac{iz-2+4i}{z-i} = z$. (1,00pt)

2°) A tout point M d'affixe z, avec $z \neq i$, on associe le point M' d'affixe z'

tel que : $z' = \dfrac{iz-2+4i}{z-i}$.

a/ Exprimer $z' - i$ en fonction de z. (0,50pt)

b/ Montrer que $(z'-i)(z-i) = -3+4i$. (0,25pt)

c/ En déduire la valeur de $|z'-i|.|z-i|$. (0,25pt)

d/ Déterminer l'ensemble (C) des points M tels que $|z-i| = \sqrt{10}$. (0,50pt)

e/ En utilisant les résultats précédents, montrer que si M appartient au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{10}$ alors M' appartient à un cercle (C') de centre A dont on déterminera le rayon. (0,50pt)

3°) Soit S la similitude plane directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\dfrac{5\pi}{4}$.

a/ Ecrire l'expression complexe de S. (1,00pt)

b/ Soit B le point d'affixe $1+3i$ et $B' = S(B)$. Déterminer l'affixe de B'.
Montrer que B' appartient au cercle (C). (0,5+0,5pt)

EXERCICE 2 *(5 points)*

On dispose de deux dés cubiques parfaits et identiques D_1 et D_2.
Chaque dé comporte : - trois faces numérotées 1
- deux faces numérotées 2
- une face numérotée 5.

1°/ On lance une fois le dé D_1 et on note le numéro apparu sur la face supérieure du dé.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « Le numéro apparu est impair ». (0,50pt)
B : « Le dé donne le numéro 1 ». (0,50pt)

2°/ On lance simultanément les deux dés D_1 et D_2 et on note les numéros apparus sur les faces supérieures des deux dés. On dit qu'on a effectué ainsi "une épreuve".

a) Soit l'événement C : « La somme des numéros notés est égale à 4 ».
Montrer que la probabilité de l'événement C : $P(C) = \dfrac{1}{9}$. (0,50pt)

b) Calculer la probabilité de l'événement :
E : « Les deux dés donnent le même numéro ». (0,50pt)

c) Soit X la variable aléatoire réelle qui, à chaque éventualité, associe la somme des numéros apparus sur les faces supérieures des deux dés.
Préciser l'univers image de X puis déterminer la loi de probabilité de X. (0,25+1,00pt)

3°/ Une partie consiste à effectuer 4 épreuves successives d'une manière indépendante.
A chaque épreuve, on note les numéros obtenus. On fait une partie. Soit Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois de réalisation de l'événement C lors d'une partie.

a) Préciser l'univers image de Y. (0,25pt)

b) Calculer l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de Y. (0,50+0,50pt)

c) Calculer $P(Y = 3)$. (0,50pt)

PROBLEME (10 points)

Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2\ln(x+1) & \text{si } x \in]-1, 0[\\ x - 1 + e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2cm).

1°) a/ Montrer que f est continue en $x_0 = 0$. (0,50pt)

b/ Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$. (0,50+0,50pt)

Que peut-on en conclure sur f ? (0,25pt)

2°) a / Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (0,25+0,25pt)

b/ si $x \in]-1, 0[$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe. (0,50+0,25pt)

c/ si $x \in]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe. (0,50+0,25pt)

d/ Dresser le tableau de variation de f. (1,25pt)

3°) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$. (0,50pt)

4°) Tracer (C) et (D) dans un même repère (préciser les demi-tangentes à l'origine 0 du repère). (1+0,5+0,5pt)

5°) Soit α un nombre réel tel que $\alpha > 1$.

On note $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \alpha$.

a/ Exprimer, en cm^2, $A(\alpha)$ en fonction de α. (0,50pt)

b/ Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$. (0,25pt)

6°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \int_n^{n+1} [f(x) - (x - 1)]\, dx$.

(En remarquant que si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [n, n+1]$ on a : $f(x) = x - 1 + e^{-x}$).

a/ Exprimer U_n en fonction de n. (0,50pt)

b/ Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (0,50pt)

7°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [0, +\infty[$.

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}. (0,25pt)

b/ Représenter graphiquement g^{-1} dans le même repère que (C). (0,50pt)