ection de l'Enseignement Supérieur — BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

Service de l'Evaluation et de la Scolarité — SESSION 2008

Série : D — Epreuve de : MATHEMATIQUES

Durée : 3 Heures 15 mn

Code Matière : 009 — Coefficient : 4

SUJET

NB : - Les DEUX exercices et le problème sont obligatoires.

- Machine à calculer autorisée.

Exercice 1 (5 points)

1 – Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$. (1,25 pt)

2 – Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (Unité 1 cm), on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A = -1 + i$; $z_B = 1 - i$; $z_C = 2i$ et $z_D = 4 + 6i$.

a) Placer les points A, B, C et D. (0,5 pt)

b) Ecrire l'expression complexe de la similitude directe S telle que S(D) = A et S(C) = B. (1 pt)

c) Donner les éléments caractéristiques de la similitude S. (0,75 pt)

3 – A tout point M d'affixe z (M ≠ D), on associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que : $z_1 = \dfrac{2z-4i}{z-4-6i}$.

a) Montrer que $OM_1 = \dfrac{2CM}{DM}$. (0,5 pt)

b) Déterminer et représenter graphiquement les ensembles (Γ) et (Γ') tels que :

- (Γ) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z_1| = 2$. (0,5 pt)
- (Γ') est l'image de (Γ) par la similitude S. (0,5 pt)

Exercice 2 (5 points)

Une urne contient 2 boules rouges et 4 boules vertes. Les boules rouges portent respectivement les numéros 0 et 1 ; les boules vertes portent respectivement les numéros 2, 3, 4 et 5. L'épreuve (E) consiste à tirer simultanément 3 boules de l'urne ; on appelle « succès » l'obtention de 3 boules de même couleur.

1 – On effectue une fois l'épreuve (E)

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « avoir un succès ». (0,75 pt)

B : « avoir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 6 ». (0,75 pt)

2 – A chaque épreuve (E), on désigne par X la variable aléatoire réelle qui prend comme valeur le plus grand des numéros portés sur les 3 boules tirées.

a) Donner l'univers-image de X. (0,5 pt)

b) Donner la loi de probabilité de X. (2 pts)

3 – On répète n fois de suite, d'une manière indépendante l'épreuve (E). On note l'événement :

A_n : « Obtenir au moins un succès lors des n épreuves (E) »

a) Calculer la probabilité p_n de l'événement A_n. (0,5 pt)

b) Déterminer le nombre minimum d'épreuves (E) qu'on doit effectuer pour que $p_n > 0,99$. (0,5 pt)

On donne : $\ln \dfrac{5}{4} = 0,22$; $\ln 10 = 2,30$

Problème *(10 points)*

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$ où e désigne le nombre réel base des logarithmes népériens.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 1$ cm.

1 – On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = -2\ln x - xe + 1$.

a) Donner le sens de variation de g. *(1,25 pt)*

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$. *(1 pt)*

c) En déduire que, pour tout $x \in]0, \alpha[$, $g(x) > 0$ et pour tout $x \in]\alpha, +\infty[$, $g(x) < 0$. *(0,5 pt)*

d) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$. *(0,5 pt)*

2 – a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. *(0,75+0,5 pt)*

b) Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction f et vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$ *(0,5+0,25 pt)*

c) Dresser le tableau de variation de f. *(0,5 pt)*

3 – Tracer la courbe (C) en précisant les branches infinies.

On prendra $\ln 2 = 0.69$; $e = 2,71$; $\alpha = 0,67$ et $f(\alpha) = 3,16$ pour la construction. *(1.25 pt)*

4 – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ et $A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(x)\,dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$. *(1 pt)*

b) Montrer que $A_n = I_n + e$. *(1 pt)*

c) Calculer en cm² l'aire du domaine plan compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = e$. *(1 pt)*