D

Série : D

Code matière : 009

Epreuve de : MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures 15 mn

Coefficients : 4

N.B. : - Les deux Exercices et le Problème sont obligatoires.
- Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

EXERCICE 1 (5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1 - 3i)z - 4 = 0$ (1,00)

2) a) Dans le plan complexe (P), muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm, placer les points A, B et D d'affixes respectives 1, $(-1-i)$ et $(2-2i)$ ainsi que le point C milieu du segment [BD] dont on précisera l'affixe. (0,25+0,25)

b) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que : $\left|\frac{z+1+i}{z-2+2i}\right| = 1$. (1,00)

c) Montrer que (Δ) passe par A. Achever alors la construction de (Δ). (0,50+0,50)

3) On considère la similitude plane directe S définie par : $\begin{cases} S(B) = B \\ S(A) = D \end{cases}$

Préciser les éléments caractéristiques de S. (0,5+0,5+0,5)

EXERCICE 2 (5 points)

A - On dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) On lance une fois le dé. Calculer la probabilité d'avoir un nombre strictement supérieur à 2. (0,50)

2) Maintenant, on lance deux fois de suite ce dé. Une éventualité est un couple d'entiers naturels (a,b). On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque couple (a,b) obtenu, associe le réel $|a-b|$.

a) Déterminer l'univers image de X. (1,00)

b) Etablir la loi de probabilité de X. (0,50)

B - Lors d'un test, les notes obtenues par 4 candidats, aux épreuves de chant et de musique, sont indiquées dans le tableau suivant :

Musique (x_i)	α	3	6	9
Chant (y_i)	2	4	5	β

1) On sait que le point moyen associé à cette série statistique a pour coordonnées $\bar{x} = 5$ et $\bar{y} = 4,5$; déterminer les notes α et β respectivement obtenues par deux candidats différents en musique et en chant. (0,25+0,25)

2) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Interpréter le résultat obtenu. (1,00+0,50)

3) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x. (1,00)

PROBLEME (10 points)

I) g est la fonction numérique définie et continue sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de g sur $]0, +\infty[$. (1,00)

2) Montrer qu'il existe un réel unique α dans $]0, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. (0,50)

3) Etudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. (1,00)

II) On considère maintenant la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (x + 1) - \left(\frac{1 + \ln x}{x}\right)$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm.

1) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout réel x de $]0, +\infty[$ où f' est la fonction dérivée de f. (1,00)

b) En déduire que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ pour tout réel x de $]0, +\infty[$. (0,50)

2) a) Calculer les limites de f aux bornes de $]0, +\infty[$. (0,50+0,50)

b) Dresser le tableau de variation de f. (1,50)

3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique de $(\mathscr{C})$. (0,50)

b) Déterminer l'abscisse de A, point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec (Δ). (0,50)

4) Tracer (Δ) et $(\mathscr{C})$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(Pour construire, on prendra $\frac{1}{e} = 0,4$; $\alpha = 0,6$ et $f(\alpha) = 0,8$). (0,50+1,00)

5) Calculer l'intégrale I définie par $I = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x}\,dx$. (1,00)

=============================