D

| | | | |
|---|---|---|---|
| Série : | D | Epreuve de : | MATHEMATIQUES |
| | | Durée : | 3 heures 15 mn |
| Code matière : | 009 | Coefficients : | 4 |

N.B. : - Les deux Exercices et le Problème sont obligatoires.
- Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

## EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ d'unité : 1 cm

1) P est le polynôme de la variable complexe z défini par :
$P(z) = z^3 - (6+2i)z^2 + (10+8i)z - 4 - 8i$.
   a) Calculer P(2). (0.25pt)
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. (1pt)

2) On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 + i$ ; $b = 2$ ; $c = 3 + i$ et d.
   a) Calculer d pour que ABCD soit un carré. (0.75 pt)
   b) On considère la similitude plane directe S définie par son expression complexe : $z' = (1 + i)z + 4i$
   - Donner les éléments caractéristiques de S. (1 pt)
   - Déterminer l'expression analytique de S. (1 pt)

3) Construire dans le même repère ABCD et A'B'C'D' son image par S. (1 pt)

## EXERCICE 2 (5 points)

1) Les faces d'un dé cubique $D_1$ truqué sont numérotées : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3.
On lance une fois ce dé. Chaque face a la même probabilité d'apparition.
On note $P_i$ la probabilité d'apparition de la face portant le numéro i.
   Calculer $P_1$, $P_2$ et $P_3$. (0,25 + 0,25 + 0,25)

2) Les faces d'un deuxième dé cubique normal $D_2$ sont numérotées de 1 à 6.
On lance simultanément les deux dés $D_1$ et $D_2$.
Chaque face a toujours la même probabilité d'apparition.
   a) Calculer la probabilité de l'événement :
   « les deux dés affichent le même numéro » (0,5 pt)
   b) On désigne par X la variable aléatoire définie par la somme des numéros affichés par les deux dés.
   - Donner la loi de probabilité de X (1 pt)
   - Calculer l'espérance mathématique E(X). (1 pt)

3) On lance trois fois de suite et d'une façon indépendante le dé $D_1$.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la face portant le numéro 2 lors de ces trois lancers.
   a) Donner la loi de probabilité de Y. (1 pt)
   b) Calculer la variance V(Y). (0,75 pt)

NB : Tous les résultats seront exprimés sous forme de fraction irréductible.

.../.

**PROBLEME** (10 points)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x(1 - \ln x)^2 \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité ; *1 cm.*

1) Justifier que l'ensemble de définition de f est $[0 ; +\infty[$. (0,5 pt)

2) a) Prouver que f est continue en $x_0 = 0$. (0,75 pt)

b) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. (0,5 pt)

3) a) Démontrer que pour tout $x > 0$ ; $f'(x) = (\ln x - 1)(\ln x + 1)$ où f' désigne la fonction dérivée première de f. (0,5 pt)

b) Après avoir précisé le sens de variations de f, dresser son tableau de variations. (0,5 + 0,5)

4) Tracer la courbe (C). (2 pts)

5) Soit $\alpha$ un réel appartenant à l'intervalle $]0 ; e[$.

a) Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties l'intégrale

$$I = \int_{\alpha}^{e} f(x)\,dx$$ (1,5 pts)

b) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine plan délimité par l'axe $(O, \vec{i})$, les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = e$ et la courbe (C).

Calculer en $cm^2$ $\mathcal{A}(\alpha)$ et $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$. (0,25 + 0,25)

6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e ; +\infty[$

a) Démontrer que g admet une application réciproque notée $g^{-1}$ dont on précisera l'ensemble de définition. (1 pt)

b) Calculer $g(e^2)$ et $(g^{-1})'(e^2)$ (0,25 + 0,5)

7) Tracer dans le même repère que (C) la courbe représentative $(\Gamma)$ de $g^{-1}$ (1 pt)

*On donne $e \approx 2,7$ ; $e^{-1} \approx 0,36$ ; $e^2 \approx 7,4$*