DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
Service d'Appui au Baccalauréat

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL
S E S S I O N 2 0 1 0

D

Série : D

Code matière : 009

Epreuve de : MATHEMATIQUES

Durée : 03 heures 15 mn

Coefficient : 4

N.B. : - **Les deux exercices et le problème sont obligatoires.**
- ***Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.***

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé directe $\Re = \left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 2 cm.

1) On considère les points S, R et D d'affixes respectives (-4), $(1-i)$ et $(3i)$.

Représenter, dans $\Re$, *l'image du triangle SRD, par la similitude plane directe de centre R,* d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$. 0,5

2) Soit Ψ le nombre complexe défini par $\Psi = \frac{z-3i}{z+4}$. 0,25+0,25

a) *Interpréter géométriquement* Ψ.

b) M étant le point d'affixe z, préciser la nature de chacun des ensembles (Δ) et (Σ) définis respectivement par :

$$(\Delta) = \{M \in (P); |\Psi| = 1\} \quad et \quad (\Sigma) = \left\{M \in (P); \arg(\Psi) = \frac{\pi}{2}\right\}$$ 0,5+0,5+0,25

On justifiera que (Σ) ne passe pas par l'origine des axes.

c) Construire, dans $\Re$, (Δ) et (Σ). 1

3) On donne le polynôme Q, de la variable complexe z, défini par : $Q(z) = z^4 - 3iz^3 + 8iz + 24$.

a) Calculer $Q(3i)$. 0,5

b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $Q(z) = 0$. 1,25

EXERCICE 2 (5 points)

1) A l'issue d'une expérience aléatoire, on définit une variable aléatoire X par le tableau suivant :

x	-1	2	3	4
$p(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$

a) Définir la fonction de répartition F de X. 1

b) Représenter graphiquement F dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 8cm$. 1

c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. 0,5 + 0,5

2) Une soubique contient des poussins jaunes et des poussins gris. Un enfant prend au hasard et simultanément deux poussins de la soubique. Il y a 3 fois plus de chances, pour lui, de prendre deux gris que deux jaunes.
La probabilité de prendre deux poussins de couleurs différentes est le double de celle de prendre deux poussins gris.

a) Prouver que la probabilité pour l'enfant de prendre deux poussins gris est égale à 0,3. **1,5**

b) Déterminer la probabilité pour l'enfant de prendre au moins un poussin gris. **0,5**

PROBLEME (10 points)

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=-x\ln(x)-(1-x)\ln(1-x) \quad si \quad 0<x<1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

1) *Préciser* l'ensemble de définition de f. **0,25**

2) Prouver que f est continue en 0 et en 1. **1**

3) Justifier que l'on a :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty.$$ **0,5 + 0,5**

Que peut-on en déduire pour la dérivabilité de f en 0 et en 1, puis pour les tangentes à la courbe représentative de f aux points $O(0;0)$ et $P(1;0)$? **0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25**

4) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;1[$. **0,75**

b) Résoudre, dans $]0;1[$, l'inéquation : $\ln(1-x)-\ln(x)\leq 0$. **0,5**

c) Dresser le tableau de variation de f. **0,75**

5) Tracer la courbe représentative de f et ses tangentes, dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 10 cm.

(On prend $\ln(2)\simeq 0,7$) **1,75**

6) Soit u et v les fonctions numériques définies respectivement sur $]0;1[$ par :

$$u(x)=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4} \quad et \quad v(x)=\frac{(x-1)^2}{2}\ln(1-x)-\frac{x^2-2x}{4}$$

a) *Calculer* $u'(x)$ *et* $v'(x)$. **0,5 + 0,5**

b) Déterminer la primitive sur $]0;1[$ de f qui prend la valeur $-\frac{3}{4}$ *en* $\frac{1}{2}$. **2**