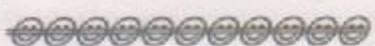


Service d'Appui au Baccalauréat

D

Série : D

Code matière : 009



Epreuve de : MATHÉMATIQUES

Durée : 03 heures 15 minutes

Coefficients : 4

NB :- Les deux (02) exercices et le problème sont obligatoires.

- L'utilisation d'une calculatrice scientifique non programmable est autorisée.

EXERCICE 1 : (5 points)

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (a+ib)z - 8 - 16i$,
 où a et b sont des nombres réels non nuls.

1) Déterminer les valeurs de a et b pour que $2i$ soit une solution de l'équation $P(z) = 0$. (0,5pt)

2) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation : (1,5pt)

$$z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i = 0.$$

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité 1 cm,

on considère les points I, J, K et A d'affixes respectives : $z_I = 2i$, $z_J = 3+i$, $z_K = 2-2i$,

$$z_A = \sqrt{3} + i$$

a) Placer les points I, J et K. A l'aide d'un compas et d'une règle non graduée, construire le point A. (0,5pt)

b) Démontrer que les droites (JI) et (JK) sont perpendiculaires. (0,25pt)

4) Soit B le point du plan tel que $z_B = \bar{z}_A$.

a) Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle AOB. (1pt)

b) Calculer l'affixe du point C pour que AOBC soit un losange. (0,25pt)

5) Soit S la similitude plane directe qui transforme B en C et laisse invariant le point O. Déterminer l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques. (1pt)

EXERCICE 2 : (5 points)

Une boîte contient six billets numérotés de 1 à 6.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux billets de la boîte. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Chaque résultat est représenté par un couple $(a; b)$ de deux nombres distincts où a est le numéro apparu au premier tirage et b le numéro apparu au deuxième tirage.

a) Démontrer qu'il y a 30 couples possibles. (0,5pt)

b) Soit A, l'évènement : « Les deux numéros tirés sont pairs ». Calculer la probabilité de A. (0,5pt)

c) Calculer la probabilité de l'évènement : B : « Obtenir au moins un numéro impair ». (1pt)

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat, associe la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres. Par exemple, pour les couples $(3; 5)$ et $(5; 3)$, la variable aléatoire X prend la valeur $5 - 3 = 2$.

a) Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire X ? (1pt)

b) Calculer les probabilités : $P(X=1)$ et $P(X=3)$. (0,5pt)

c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X. (1pt)

d) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X. (0,5pt)

PROBLEME : (10 points)

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle x définie sur $D_f =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{2}{x}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 1 cm.

1) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. (0,5pt)

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$ (poser $x = X^2$). En déduire que (C) admet une branche parabolique suivant (Ox) au voisinage de $+\infty$. (0,75pt)

2) On considère une deuxième fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x \ln x - 2$.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. (0,5pt)

b) Etudier la variation de g , puis dresser son tableau de variation. (1,5pts)

c) Démontrer qu'il existe un nombre réel unique $\alpha \in]2; e[$ tel que $g(\alpha) = 0$. (0,75pt)
En déduire le signe $g(x)$. (0,5pt)

3) a) Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. (1pt)

b) Dresser le tableau de variation de f . On prend $\alpha = 2,5$ et $f(\alpha) = 1,12$. (1pt)

4) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$. (0,25pt)

b) Tracer dans le même repère la droite (T) et la courbe (C) . (1,25pt)

5) a) On donne $\int_{\alpha}^e \ln x \, dx = -\alpha \ln \alpha + \alpha$.

A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\int_{\alpha}^e \frac{1}{2}(\ln x)^2 \, dx = \frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\ln \alpha)^2 + \alpha \ln \alpha - \alpha. \quad (1pt)$$

b) Calculer, en fonction de α et en cm^2 , l'aire géométrique \mathcal{A} du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations :

$$x = \alpha \quad \text{et} \quad x = e. \quad (0,5pt)$$

c) Sachant que : $\alpha \ln \alpha = 2$, démontrer que $\mathcal{A} = \left(\frac{e}{2} + 4 - \frac{6}{\alpha} - \alpha\right) \text{cm}^2$. (0,5pt)
