

SERIE A

Epreuve de

MATHEMATIQUES

Durée

2 Heures 15 minutes

Code Matière : 08

Coefficients

 $A_1 = 1 ; A_2 = 3$

- N.B. : - Les deux Exercices et le Problème sont obligatoires.
 - Barème de notation : - premier point : option A₁
 - deuxième point : option A₂

Exercice 1 : (4 points ; 12 points)On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = \frac{2+U_n}{1+2U_n} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

On pose $V_n = \frac{-1+U_n}{1+U_n}$.

- 1 - Calculer U_1 et U_2 . 0,5pt ; 1,5pt
- 2 - a - Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. 1pt ; 3pts
 b - Exprimer V_n en fonction de n . 0,5pt ; 1,5pt
- 3 - a - Exprimer U_n en fonction de V_n . 1pt ; 3pts
 b - En déduire l'expression de U_n en fonction de n . 0,5pt ; 1,5pt
 c - En déduire la limite de la suite (U_n) . 0,5pt ; 1,5pt

Exercice 2 : (4 points ; 12 points)

Un sac contient 12 vêtements tous confectionnés avec un même tissu dont la répartition suivant la couleur et l'article est donnée par le tableau ci-dessous :

Article \ Couleur	Pantalon	Jupe	Chemise
Blanche	0	2	3
Rouge	2	1	1
Noire	1	1	1

Chaque vêtement a la même probabilité d'être tiré.

1. On tire au hasard 2 vêtements du sac. Calculer la probabilité des événements suivants :
 B : « Obtenir une jupe et une chemise blanches ». 1pt ; 3pts
 A : « Obtenir au moins un pantalon rouge ». 1pt ; 3pts
2. On tire successivement 3 vêtements du sac sans remettre dans le sac le vêtement qui a été tiré. Calculer la probabilité des événements suivants :
 C : « Les 3 vêtements tirés sont des chemises ». 1pt ; 3pts
 L : « Obtenir 3 vêtements de couleurs différentes deux à deux ». 1pt ; 3pts

Problème : (12 points ; 36 points)

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{2}{1 + e^x}.$$

On note par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. Donner l'ensemble de définition de f . 0,5pt ; 1,5pt
2. a.- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 0,5pt ; 1,5pt
 b.- Montrer que la droite d'équation $y = x - 4$ est une asymptote oblique à (\mathcal{C}) . 0,5pt ; 1,5pt
 c.- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 2)]$. Que peut-on en conclure ? 0,5pt ; 1,5pt
 d.- Préciser la position de (\mathcal{C}) par rapport à ses asymptotes. 1pt ; 3pts
3. a.- Calculer la fonction dérivée f' de f . 1pt ; 3pts
 b.- Dresser le tableau de variation de f . 1pt ; 3pts
4. a.- Montrer que le point $I(0, -3)$ est un centre de symétrie pour (\mathcal{C}) . 1pt ; 3pts
 b.- Donner l'équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point I . 1pt ; 3pts
 c.- Vérifier que I est un point d'inflexion pour (\mathcal{C}) . 1pt ; 3pts
5. Tracer (\mathcal{C}) et (T) dans un même repère. 1pt ; 3pts
6. a.- Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = x - 2 - 2 \frac{e^x}{1 + e^x}$. 0,5pt ; 1,5pt
 b.- Soit $g(x) = \ln(1 + e^x)$. Calculer la fonction dérivée g' de g . 0,5pt ; 1,5pt
 c.- En déduire une primitive F de f . 1pt ; 3pts
 d.- Calculer en cm^2 et à 10^{-2} près l'aire du domaine-plan limité par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$. 1pt ; 3pts

On prend $\ln 2 \approx 0,70$ et $\ln(e^2 + 1) \approx 2,13$.