



A

Série : A

Code matière : 009

Epreuve de : MATHÉMATIQUES

Durée : 02 heures 15 minutes

Coefficients : A1 = 1 ; A2 = 3

NB : Les deux exercices et le problème sont obligatoires
Machine à calculer scientifique non programmable autorisée

Exercice 1 (5 points)

On considère la suite arithmétique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$U_1 + 2U_3 - U_5 = 2 \text{ et } U_2 = -1$$

1) a) Exprimer U_1, U_3 et U_5 en fonction de U_2 et de la raison r .

(0,25pt + 0,25pt
+0,25pt)

b) Calculer r . En déduire le sens de variation de (U_n) .

(0,5pt + 0,25pt)

2) Exprimer U_n en fonction de n . Calculer U_{25} .

0,5pt + 0,5pt)

3) Calculer la somme $S = U_2 + U_3 + \dots + U_{25}$.

(0,75pt)

4) On pose $V_n = e^{3-2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.

(0,75pt + 0,25pt
+0,25pt)

b) Exprimer la somme $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ en fonction de n .

(0,5pt)

Exercice 2 : (5 points)

On dispose de huit plaquettes indiscernables au toucher. Sur chacune d'elles est inscrite une lettre du mot « SCIENCES ».

1) La première épreuve consiste à tirer simultanément quatre plaquettes.

a) Déterminer le nombre de cas possibles.

(0,5pt)

b) Calculer la probabilité d'obtenir :

A : « Aucune lettre E ».

(1pt)

B : « Au plus une consonne ».

(1pt)

2) La deuxième épreuve consiste à tirer une à une et sans remise trois plaquettes.

Calculer la probabilité des événements suivants :

C : « Avoir au moins une voyelle ».

(0,5pt + 1pt)

D : « Avoir le mot ENS ».

(1pt)

NB : On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

PROBLEME (10 points)

A1

A2

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 - 1$. On note par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. a) Calculer la limite de f en 0^+ .

(0,5pt) ; (0,5pt)

Interpréter graphiquement le résultat.

(0,5pt) ; (0,5pt)

- b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

(0,5pt) ; (0,5pt)

2. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

Interpréter graphiquement ce résultat

(0,5pt) ; (0,25pt)

3. a) Montrer que $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$ où f' est la fonction dérivée de f .

(1pt) ; (0,75pt)

- b) Etudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f .

(1pt) ; (1pt)

4. a) Vérifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$; $f(x) = (\ln x - 1)(\ln x + 1)$.

(0,5pt) ; (0,5pt)

- b) Résoudre $f(x) = 0$ dans $]0; +\infty[$. En déduire les coordonnées des points A et B

intersection de la courbe (\mathcal{C}) avec l'axe des abscisses ($x_A < x_B$)

(0,5pt + 0,5pt ; (0,5pt + 0,25pt + 0,5pt) + 0,25pt)

5. a) Montrer que le point B est un point d'inflexion pour la courbe (\mathcal{C}) .

(1pt+0,5pt) ; (0,5+0,5pt)

- b) Ecrire une équation de la tangente (T) au point B.

(1,25pt) ; (1pt)

6. Tracer (\mathcal{C}) et (T) dans le même repère.

(1,25pt) ; (1pt)

Pour A2 seulement

7. Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$F(x) = x[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2] - x \Rightarrow$$

- a) Montrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

(1pt)

- b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine, plan limité par (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et

les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.

(1pt)

$$\text{On donne } \frac{1}{e} = e^{-1} \approx 0,4 ; e \approx 2,7$$

