

SERIES: SET-MTI-MTGC / TSE

A– Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1°/ A un point M on associe le point M_1 image de M par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$, puis le point M' image de M_1 par la symétrie orthogonale d'axe $(O ; \vec{i})$.

- a) Calculer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M.
- b) Caractériser la transformation qui fait passer de M à M' .
- c) Au point M on associe maintenant le point N de coordonnées X et Y définies par :

$$(I) \begin{cases} X = 1 + y \\ Y = 1 - x \end{cases}$$

Montrer que cette transformation est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ .

2°/ Le point M décrivant la droite d'équation $y = x$, déterminer l'ensemble décrit par N
Quel est l'ensemble décrit par le milieu du bipoint (M, N) ?

3°/ Au point M on associe le point N' de coordonnées X' et Y' définies par

$$(II) \begin{cases} X' = 1 + 3y \\ Y' = 1 - 2x \end{cases} :$$

- a) Quelle est la nature de l'ensemble E des points N' lorsque M décrit le cercle unité de centre O ?
- b) Caractériser le transformé de E dans la transformation (I).

B– Dans tout ce qui suit on suppose qu'on associe au point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ dont les coordonnées sont définies par :

$$(III) \begin{cases} x' = a + x \sin \theta + y \cos \theta \\ y' = a - x \cos \theta + y \sin \theta \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

1°/ Montrer que si $\sin \theta \neq 1$, la transformation (III) admet un point invariant w dont on calculera les coordonnées x_0 et y_0 en fonction de a et θ .

2°/ a) Calculer en fonction de a la somme $x_0 + y_0$ et en fonction de θ le quotient $\frac{x_0}{y_0}$.

- b) En déduire que l'ensemble décrit par w quand θ varie, a restant fixe sur une droite D, et que l'ensemble décrit par w quand a varie, θ restant fixe sur une droite D'.
- c) En s'appuyant sur ce qui précède, indiquer une construction géométrique du point w, a et θ étant connus.

- d) Démontrer que la transformation définie par (III) est une isométrie dont on déterminera la nature. Montrer que (I) est un cas particulier de (III).

C– Soit la fonction numérique $f : x \mapsto (2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$

1°/ Etudier f et tracer sa courbe C dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Préciser les tangentes à C aux points $x_0 = -1$ et $x_1 = -\frac{1}{2}$.

2°/ Soit C' la courbe symétrique de C par rapport à (O, \vec{i}) . On pose $\Gamma = C \cup C'$. Tracer Γ .

3°/ On considère le point $A(-1; 0)$ et la droite $\Delta : x = -2$.

Soit $m \in \mathbb{R}^*$; on considère la droite $D : y = mx$ et la droite D' orthogonale à D en $O(0;0)$.

Les droites D et D' coupent Δ en B et B' respectivement Soit K le milieu de du bipoint $(B; B')$,

la droite (AK) coupe D et D' en M et M' respectivement.

a) Déterminer les coordonnées de M et M' en fonction de m .

b) On appelle Γ_1 l'ensemble des points M lorsque $m \in \mathbb{R}^*$ et Γ_1' celui des points M' lorsque $m \in \mathbb{R}^*$. Trouver une relation entre Γ_1 et Γ_1' .

Barèmes : A = 10 pts ; B = 6pts ; C = 4 pts