

SERIES:**SET-MTI-MTGC / TSE**

A/ L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes est considéré comme un espace vectoriel euclidien sur \mathbb{R} . Soit $B = (1 ; i)$ la base constituée des nombres complexes 1 et i .

On dira que le complexe $z = x + yi$ est le vecteur de coordonnées $(x ; y)$ dans la base $(1 ; i)$. Si les couples $(x ; y)$ et $(x' ; y')$ sont les coordonnées de deux vecteurs de cet espace, le produit scalaire sera $xx' + yy'$. Soit a un réel donné et f_a l'application linéaire de \mathbb{C} dans \mathbb{C} de matrice.

$$M = \begin{pmatrix} 2a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dans la base } B.$$

On pose $f_a(z) = Z = X + Yi$ avec $z = x + yi$; $(x, y, X \text{ et } Y' \text{ réels})$.

I/-

1% Quelles sont les coordonnées de Z dans la base B ?

2% Exprimer en fonction de x et y puis en fonction de z et \bar{z} où $\bar{z} = x - yi$.

3% Quels sont les éléments de \mathbb{C} invariants par f_a ? Vérifier que l'ensemble de ces éléments est dans tous les cas un sous espace vectoriel de \mathbb{C} .

4% Pour quelles valeurs de a f_a est elle une rotation vectorielle ?

II/

1% Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, f_a est une bijection de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . Soit f_a^{-1} l'application réciproque de f_a . On pose $f_a^{-1}(z) = Z' = X' + Y'i$.

2% Déterminer dans la base B la matrice de f_a^{-1} .

3% Soit $z = x + yi$ un élément de \mathbb{C} . Exprimer $Z' = f_a^{-1}(z)$ en fonction de x et y puis en fonction de z et \bar{z} . Déterminer une relation entre Z , Z' et z .

En déduire que $f_a + f_a^{-1} = 2aI_{\mathbb{C}}$ où $I_{\mathbb{C}}$ est l'application identique de \mathbb{C} . $f_a - f_0$.

4% Si $a \neq 0$, déterminer le noyau et l'image de

B/ Soit \mathcal{P} un plan affine associé au plan vectoriel \mathbb{C} et rapporté à un repère orthonormé d'origine O et de base B . On désigne par φ_a l'application affine de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui au point O associe le point $A(1 ; a)$ où a est un réel et dont l'application linéaire associée est f_a . L'image par φ_a d'un point N est alors $\varphi_a(N) = N'$.

I/-1° Déterminer les coordonnées x' et y' de N' en fonction des coordonnées x et y de N .

2° Démontrer que si $a \neq 1$ alors φ_a admet un unique point invariant Ω_a dont on déterminera les coordonnées. Si $a = 1$, quel est l'ensemble des points invariants ?

3° Etablir que φ_a est la composée d'une application affine de point invariant O et d'une translation.

4° Quelle est l'image par φ_a de la droite d'équation $x = 0$ et de la droite affine d'équation $y = 2ax$.

II/ On pose $a = 0$. Montrer que φ_0 est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

Quelle est l'image par φ_0 du cercle de centre O et de rayon 1 ? Quelles sont les images par φ_0 des bissectrices des axes du repère ?

III/ On pose $a = 1$.

1° Exprimer $y' - x'$ en fonction de $y - x$. En déduire qu'il existe une famille de droites de même direction globalement invariantes par φ_1

2° On considère la fonction numérique f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

Etudier la fonction f , construire sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans le plan muni du repère $(O ; B)$. Déterminer une équation de (\mathcal{C}') transformée de (\mathcal{C}) par φ_1 .

Vérifier que cette équation peut s'écrire sous la forme $x = y - \frac{1}{y}$. Construire (\mathcal{C}')

sur le même repère que (\mathcal{C}) (On pourra au préalable étudier et représenter la

fonction $g : x \mapsto y = x - \frac{1}{x}$. on déduira la courbe (\mathcal{C}') de la courbe de la fonction g

IV/ 1° On pose $a \neq 0$, soit T_1 l'application de P dans P qui au point O associe le point $A(1, a)$ et dont l'endomorphisme associé est $f_a + f_a^{-1} = u$. Démontrer que T_1 est une homothétie T_{-1} une translation.

2° On suppose que $a \neq \frac{1}{2}$ Soit T_2 l'application affine de P dans P

d'endomorphisme associé $f_a - f_0$. telle que $T_2(O) = A(1 ; 0)$.

Démontrer que T_2 est la composée d'une homothétie, d'une projection sur une droite et d'une translation.