Exercice1 :

On considère l'équation :

$$z \in C, z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i = 0 \qquad (1)$$

1-Vérifier que i est une solution de l'équation (1) ,puis résoudre cette équation .
2-Montrer que les solutions de l'équation (1), sont les trois premiers termes d'une suite géométrique (z_n) $n \in IN$,de premier terme i .Déterminer le 15è terme de cette suite .
3- Déterminer n pour que z_n soit un élément de IN .

Exercice2 :

Soit f la fonction de ℝ vers ℝ définie par :

$$f(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3$$

1-Montrer en étudiant les variations de f, que l'équation $f(x) = 0$,admet dans ℝ une solution unique élément de $]0;1[$.

2-Montrer que si l'équation $x \in IR, f(x) = 0$ admet une solution rationnelle $\frac{p}{q}$,où p et q sont premiers entre eux ,alors p divise 3 et q divise 4 .
Quels sont les rationnels vérifiant cette dernière condition ?

3-Trouver une solution rationnelle de l'équation $f(x) = 0$ et achever la résolution de cette équation dans ℂ.

PROBLEME :

Le plan affine euclidien E est rapporté à un repère orthonormé (O ;i ; j) ,d'unité graphique 2cm.
I – Soit f_m la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_m(x) = mx + e^x \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

On désigne par C_m la courbe de f_m dans (O ; i ; j) .

1)a) Montrer que toutes les courbes C_m passent par un point fixe que l'on déterminera .
b)En discutant suivant les valeurs de m , étudier les variations de la fonction f_m.
2) On suppose $m \succ 0$.
a) Montrer que f_m est une bijection.
b) Montrer que f_m^{-1} est dérivable sur ℝ, puis calculer son nombre dérivé au point 1.
3) On suppose $m=-1$ et on désigne par D l'asymptote à C_{-1}.
a) Tracer C_{-1}. Calculer l'aire A(λ) du domaine plan limité par la courbe C_{-1} , D et les droites d'équations x = λ et x = 0 où λ est un réel négatif.
b) Calculer $\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.
II- On considère, l'application affine f de E dans E qui à tout point P(p ;q) associe le point P' (p' ; q') tel que $\begin{cases} p' = p\ln x - q\ln y \\ q' = p\ln y + q\ln x \end{cases}$
x et y sont deux paramètres réels strictement positifs et ln désigne le logarithme népérien .
1) Pour quelle valeur du couple (x ; y) f n'est pas bijective ?
2) On suppose que x et y sont les coordonnées dans (O ; i j), d'un point M de E.
a) Déterminer l'ensemble des points M tels que f soit une homothétie.
b) Donner l'expression de fof dans (O, i, j). En déduire l'ensemble des points M tels que f soit involutive. Préciser alors f.
c) Déterminer l'ensemble G des points M tels que f soit une isométrie . Donner une équation de G .
d) Montrer que G est la réunion de deux courbes G_1 et G_2 d'équations respectives : $y = e^{\sqrt{1-(\ln x)^2}}$ et $y = e^{-\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

e) On pose $f_1(x) = e^{\sqrt{1-(\ln x)^2}}$ et $f_2(x) = e^{-\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

Préciser les ensembles de définitions de f_1 et $f_2$puis calculer $f'_1(x) et f'_2(x)$.
III- On considère l'application g de E dans E qui à tout point M(x y) associe le point M' (x' ; y') tel que $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$
1/ Montrer que g est affine , sans point invariant et que son endomorphisme associé φ est involutif .
2/ a) Démontrer que g∘g est une translation
b)Soit $\vec{u}$ le vecteur de cette translation et t la translation de vecteur $\frac{\vec{u}}{2}$. Préciser la nature de l'application s , telle que g = t∘s . Prouver que t∘s = s∘t .
3/ Montrer que l'image C' de la courbe C_{-1} par g a pour équation y = -x + 2+lnx .
Construire C' dans le repère (O ,i ,j) .
C' coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_0 = 0,16 et x_1 = 3,14 .