SERIES: SET-MTI-MTGC / TSE

EXERCICE 1 : (5 points)

Soit m un nombre entier

1. Montrer que l'équation : $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $6y - 3x = m$. Admet des solutions si et seulement si m est multiple de 3.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :
   a) $6y - 3x = 5$
   b) $6y - 3x = 3$
3. Déduire de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation :
   $(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$

EXERCICE 2 : (5points)

1. Calculer $\int_0^1 e^x \, dx$
2. Soit f, l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
   $f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16$

a) Trouver les deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait :
$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$

b) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$

c) Placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u};\vec{v})$ les images A, B, C, D des solutions de l'équation précédente, puis montrer que ces points sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

PROBLEME : (10points)

Les parties A) et B) du problème sont indépendantes.

A) Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O,

tel que : $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2}$

Soit P un point du segment [BC], distinct de B. On note Q le point d'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire (d) à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure en prenant BC= 3cm, BP = 1cm et en plaçant (BC) horizontalement sur la feuille.
2. Soit **r** la rotation de centre **A** et d'angle $\frac{\pi}{2}$
   a) Préciser l'image de la droite (BC) par **r**.
   b) Déterminer les images de R et P par **r**.
   c) Quelle est la nature des triangles RAQ et PAS ?

3. On note N le milieu de [PS] et M celui de [QR].

Soit **s** la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

a) Préciser les images des points R et P par **s**.
b) Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?
c) De ce qui précède, déduire que les points M, N, B, et D sont alignés.

B) Soit n un entier naturel non nul.

Dans le plan affine rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{i};\vec{j}$) on considère les points **A_n** de l'axe (O ; $\vec{i}$) définis par : $\overrightarrow{OA_1} = \vec{i}$; $\overrightarrow{A_1A_2} = 2\vec{i}$; $\overrightarrow{A_2A_3} = 2^2\vec{i}$;------ ; $\overrightarrow{A_nA_{n+1}} = 2^n\vec{i}$

On considère les carrés K_1, K_2 , …………, K_n,……construits respectivement sur les segments [OA_1] ; [A_1A_2] ;… ;[$A_n A_{n+1}$] ;…et dont les sommets ont une ordonnée positive.
Les points O, A_1, B_1, C_1 sont les sommets de K_1
Les points A_1, A_2, B_2, C_2 sont les sommets de K_2
Les points A_{n-1}, A_n, B_n, C_n sont les sommets de K_n où l'abscisse de B_n est supérieure à celle de C_n.

On fera une figure en prenant un centimètre (1 cm) comme unité.

1. **a /** Calculer les coordonnées de B_n et de C_n.
b/ Montrer que les points C_1, C_2,……….,C_n sont alignés.
c/ Montrer que les points B_1, B_2,……….,B_n sont alignés.
d/ Donner une équation cartésienne de chacune des droites (C_1C_2) et (B_1B_2).

2. Soit O_n le centre du carré K_n.
a) Calculer les coordonnées de O_n
b) Montrer que O_1, O_2, ………, O_n sont alignés.
c) Ecrire une équation de la droite (O_1O_2).

3. **a/** Calculer l'aire U_n du carré puis la somme :
$S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{S_n}{4^n}\right)$

4. **a/** Montrer que pour tout n≥ 1, il existe une homothétie h de centre Ω (–1 ; 0), transformant le carré K_n en le carré K_n.
b/ Préciser le rapport de cette homothétie.

Retrouver ainsi les résultats obtenus aux questions 1 et 2.

5. soit **r** la rotation de centre O_1 et d'angle π

a) Montrer que **h' = h o r** est encore une homothétie transformant K_1 en K_n ;

b) Déterminer le centre Ω' et le rapport de **h'** lorsque n = 2.