EXERCICE I : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 1+\ln(1+x)$.
On note $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 3cm.

1–a) - Etudier le sens de variation de f

b)- Donner une équation de la tangente (Δ) à la courbe $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0.

c)- Construire $(\mathscr{C})$ et (Δ).

2- En étudiant la fonction numérique g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = x - f(x)$, démontrer que l'équation $x = f(x)$ a une solution unique α et que $\alpha \in [2;3]$.

EXERCICE II : (4points)

Dans le plan P on considère trois points A, B, et C. Soit **s** la réflexion d'axe (AC) qui transforme B en D et soit **f** l'application affine de P dans P telle que :

$f(A) = A$; $f(B) = C$ et $f(C) = D$.

1°) On pose: $\mathbf{g = s \circ f}$

a) Déterminer l'image par g des points A, B, C et celle du milieu **I** de $[BC]$

b) Etablir g est une symétrie dont on précisera l'axe (**d**) et la direction.

c) Exprimer f en fonction de **g** et **s.** En déduire une construction géométrique de l'image M' d'un point M de P par f **.**

2°) Comment faut-il choisir A, B, et C pour que f soit une isométrie ?.
Explicitez alors cette isométrie.

PROBLÈME : (12 points)

Dans ce problème, n est un entier naturel différent de zéro et on considère la famille de fonctions f_n définies sur $[0; +\infty[$ comme suit :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln(1+\frac{1}{x}) \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, et on note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n.

A- Dans cette première partie, on se propose d'étudier la fonction f_1.

1- a) – Etudier la continuité de f_1 en 0 et son comportement en $+\infty$.

b) – Etudier le comportement du rapport $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Que peut-on conclure pour la fonction f_1 et la courbe $(\mathcal{C}_1)$?

2- a) – Justifier la dérivabilité f_1 sur $]0,+\infty[$. Calculer $f_1'(x)$ puis $f_1''(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $]0,+\infty[$.

b) – Etudier successivement les variations de f_1' et de f_1 et dresser le tableau de variation de f_1.

3- Tracer la courbe $(\mathcal{C}_1)$, son asymptote et la tangente au point O.

B– La seconde partie est consacrée à l'étude des fonctions f_n lorsque $n \geq 2$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0 puis le comportement de f_n en $+\infty$.
2. **a)** Justifier la dérivabilité de f_n sur $]0, +\infty[$.

   Démontrer que : $f_n'(x) = x^{n-1}g_n(x)$ où g_n est une fonction définie sur $]0,+\infty[$ que l'on déterminera.

   b) Etudier les variations de g_n et en déduire le signe de $g_n(x)$.
   c) Dresser le tableau de f_n

C– La troisième partie porte sur les courbes $(\mathcal{C}_n)$ lorsque $n \geq 2$.

1. Quelle est la tangente à $(\mathcal{C}_n)$ en O origine du repère ?
2. Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$ pour $n \geq 2$. Quelle est la position de $(\mathcal{C}_1)$ par rapport à toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$?
3. **a)** Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln(1+\frac{1}{x}) - (x-\frac{1}{2})\right]$. Que peut-on en conclure pour $(\mathcal{C}_2)$?

   b) On précisera la position de $(\mathcal{C}_2)$ par rapport à la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$
4. Tracer $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_1)$.