EXERCICE 1 : (5 points)

1. Soit n $\in \mathbb{N}$.

a) Déterminer, suivant les valeurs de n le reste de la division par 7 de l'entier 3^n.
En déduire le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$.

b) Dans le système de numération décimal, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$.
Déterminer x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.

2. a) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525.

b) Déterminer l'ensemble des entiers x tels que : $34x \equiv 2\ [15]$.

c) Résoudre l'équation : $(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2$ $\quad 21590x + 9525y = 1270$.

d) Quel est le chiffre des unités de l'entier naturel 7^{1980} écrit dans le système décimal ?.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles du second ordre.

a) $Y'' - Y' + \frac{1}{4}Y = 0$.

b) $y'' + y' + y = 0$.

4. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle : $x'' + 5x' + 6x = 0$ vérifiant les conditions initiales : $f(0) = 1$ et $f'(0) = -6$; t est la variable.

EXERCICE 2 : (5points)

1. Soit la suite de points M_n du plan complexe, d'affixes respectives définies par :
$Z_0 = 8$ et pour tout n $\in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} Z_n$.

a) Calculer le module et un argument de $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$.

b) Calculer Z_1, Z_2, Z_3 et vérifier que Z_3 est un réel. Placer dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{e_1}; \vec{e_2})$ les points M_0, M_1, M_2 et M_3.

c) Calculer le rapport $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$.

En déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que : $|Z_{n+1} - Z_n| = \sqrt{3}|Z_{n+1}|$.

2. Le cm est l'unité de longueur choisie. On fera une figure pour visualiser.
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3, B' milieu de [AC] et un point D tel que : $4\vec{AD} = \vec{AB} + 3\vec{BC}$.

a) Démontrer que D est le barycentre des points pondérés (A,3) ; (B,–2) ; (C,3). En déduire que D appartient à la médiatrice du segment [AC].

b) Démontrer que: $\vec{BB'} = \frac{2}{3}\vec{BD}$.

c) Calculer DA^2 et DB^2.

d) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation :

$$\mathbf{3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12.}$$

Vérifier que l'isobarycentre G du triangle ABC appartient à l'ensemble (E). Tracer (E).

3.a) Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ placer les points Q (6 ; 0 ; 0) , R (0; 6 ; 0), S (0 ; 0 ; 4)

b) Déterminer les coordonnées du barycentre G des points massifs (Q,2) ; (O,1) ; (R,3).

c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que:
$(\vec{MO} + 2\vec{MQ} + 3\vec{MR}).\vec{MS} = 0$**)**. Donner une équation cartésienne de (E).

d) Déterminer l'intersection de (E) et du plan d'équation X= 0 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

<u>PROBLEME :</u> (10points)

A. La fonction numérique de la variable réelle x, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$$

1. a) - Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition

b)- Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation;

2. a)- Démontrer que l'équation f (x) = 0 admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique ℓ et que $\ell \in]1;2[$.

b)- Etudier le signe de f (x) lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^*$.

B.On se propose dans cette partie de calculer une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

1. Soit la fonction numérique définie sur l'intervalle [1;2] par : $\varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln x$

a) Etudier les variation de **φ**. Prouver que l'image par **φ** de l'intervalle [1 ;2] est un intervalle contenu dans [1 ;2].

b) Montrer que ℓ est l'unique solution de **φ** (x) = x

2. On considère alors la suite U définie sur ℕ par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Démontrer que, pour tout entier n, on a : $1 \leq U_n \leq 2$.

b) Prouver que pour tout entier x de [1 ; 2] on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier n on a :

$$|U_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2}|U_n - l|$$

d) Montrer que la suite U converge vers ℓ.

e) Déterminer un entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-2} près de ℓ.

C. La fonction g est définie sur [0 ; 1] par :

$$\begin{cases} g(o) = 0 \\ g(x) = \frac{-7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \end{cases} \quad \text{pour} \quad 0 < x \leq 1$$

a) Etudier la dérivabilité de g en 0.

b) Soit g' la dérivée de la fonction **g**.

Calculer g'(x) pour x ≠ 0, puis vérifier que $g'(x) = x\, f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $0 < x \leq 1$.

c) En déduire le signe de **g' (x)** lorsque x décrit] 0 ; 1]. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

D.Dans cette partie, l'objectif est le tracé de la courbe représentative (𝒞) de la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, $\vec{i}, \vec{j}$). (Unité graphique 10 cm).

1. a) Montrer qu'une équation de la tangente (**d**) à la courbe (𝒞) de g en son point d'abscisse 0 est y = x.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe ($\mathcal{C}$) et de la droite (**d**)

c) Etudier la position relative de ($\mathcal{C}$) et de (**d**).

d) Soit α la fonction définie sur $[\,0;\ e^{\frac{-7}{2}}\,]$ par $\alpha(x) = g(x) - x$.

Etudier le sens de variation de fonction et en déduire que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[\,0;\ e^{\frac{-7}{2}}\,]$ on a : $0 \leq \alpha(x) \leq 5.\ 10^{-5}$. Sachant que l'épaisseur d'un trait de crayon est de l'ordre du dixième de millimètre, est-il possible de distinguer, sur l'intervalle $[\,0;\ e^{\frac{-7}{2}}\,]$ la courbe ($\mathcal{C}$) de la droite (**d**) ?

2. Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction β définie sur [0 ; 1]
par : $\beta(x) = \frac{-7}{8}x^2 + x$

a) Montrer que la droite (**d**) est la tangente à la courbe (Γ) en son point d'abscisse 0.

b) Etudier la position relative de ($\mathcal{C}$) et de (Γ).

c) Tracer, sur un même graphique (**d**) ; (Γ) ; et (**d**).