

**SERIES: SET-MTI-MTGC-TSE****EXERCICE 1 : (5 points)**

1. Ecrire en base deux, puis en base seize, l'entier naturel  $N = 6932$ .
2. a) Soit  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique réelle de premier terme  $r_0$  strictement positif et de raison  $\frac{2}{3}$ . Exprimer le terme général  $r_n$  en fonction de  $n$  et de  $r_0$ .
- b) Soit  $(\theta_n)$  la suite arithmétique réelle de premier terme  $\theta_0$ ;  $\theta_0 \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$  et de raison  $\frac{2\pi}{3}$ .  
Exprimer le terme général en fonction de  $n$  et  $\theta_0$ .
- c)  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $Z_n = r_n e^{i\theta_n}$ . Sachant que  $Z_0, Z_1, Z_2 = 8$ , déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes  $Z_0, Z_1, Z_2$ .
3. Dans le plan complexe (P) rapporté à un repère orthonormal direct d'unité graphique 3 cm, on appelle  $M_n$  le point d'affixe  $Z_n = r_n e^{i\theta_n}$ .
  - a) Placer dans (P) les points  $M_0 ; M_1 ; M_2$  et  $M_3$ .
  - b)  $\forall n \in \mathbb{N}$ , calculer  $\left\| \overrightarrow{M_n M_{n+1}} \right\|$  en fonction de  $n$ .
  - c) On pose  $I_n = \sum_{k=0}^n \left\| \overrightarrow{M_k M_{k+1}} \right\|$ . Calculer  $I_n$  en fonction de  $n$ , puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
- 4- a) Ecrire sous la forme trigonométrique ou exponentielle le nombre complexe

$$Z = \frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta} ; \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$$

- b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe :

$$Z = \frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 + e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

## **EXERCICE 2 : (5points)**

1. soit un triangle ABC du plan, I le milieu du segment [ BC] et D le barycentre des points (A ; -1) ; (B ; 2) ; (C ; 2)

a) Exprimer  $\vec{AD}$  en fonction de  $\vec{AI}$ .

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$\left\| -\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} \right\| = \left\| \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \right\|.$$

c) Justifier que (E) contient I.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  direct d'unité graphique 2 cm. Dans cette question, A est le point d'affixe 1, B le point d'affixe  $2i$  et C le point d'affixe Z.

a) Que représente géométriquement  $\left| \frac{Z-2i}{1-2i} \right|$  et  $\arg \left( \frac{Z-2i}{1-2i} \right)$  ?

b) Dans la suite, on suppose que le point C d'affixe Z est défini par :

$$BC = \sqrt{\frac{2}{5}} \times BA \text{ et } (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \alpha \text{ où } \alpha \in ]-\pi ; 0] \text{ et } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}. \text{ Calculer } \sin \alpha.$$

c) Démontrer que  $\frac{Z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$ . En déduire le complexe Z et vérifier que le triangle ABC est isocèle. On fera une figure.

## **PROBLEME : (10points)**

### **Partie A**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $] -1 ; 1 ]$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right).$$

(C) est la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

I- 1°) Prouver que la courbe (C) admet deux asymptotes dont on donnera les équations.

2°) a) Déterminer  $f^{-1}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ , puis tracer (C).

3°) a) Par la technique de l'intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$$

b) En déduire l'aire A de la portion du plan située dans le premier quadrant et limitée par (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation :  $x = \frac{1}{2}$ .

II. On considère la fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie sur l'intervalle  $[0 ; \frac{\pi}{2}[$  par :

$g(x) = f(\sin x)$  où  $f$  est la fonction définie ci-dessus.

1. a) Démontrer que  $g$  est une primitive sur  $[0 ; \frac{\pi}{2}[$  de la fonction  $h$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie sur

$$[0 ; \frac{\pi}{2}[ \text{ par : } h(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

b) Calculer l'intégrale  $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t} dt$ . On donnera le résultat sous la forme  $J_2 = \ln a$  où  $a$  est un réel strictement positif.

2. On considère la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t} dt \quad \text{pour } n \geq 1$$

Expliquer brièvement pourquoi  $I_n \geq 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$

3. On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{1}{4^n \cos t} - \frac{(\sin t)^{2n}}{\cos t} \right) dt$$

a) Prouver que  $K_n \geq 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$ .

b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$0 \leq I_n \leq \frac{\ln b}{c^n} \quad \text{où } b \text{ et } c \text{ sont deux réels à déterminer.}$$

c) Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## Partie B

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $F_n$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie sur l'intervalle

$$[0 ; \frac{\pi}{2}[ \text{ par : } F_n(t) = \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} + \dots + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}.$$

1. Soit  $q$  un réel et  $n \geq 1$ .

a) Calculer en fonction de  $q$  et  $n$  la somme :

$$T_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}.$$

**b)** En utilisant le résultat précédent, déterminer pour  $t \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ , une expression simplifiée de la somme :  $S_n(t) = 1 + \sin^2 t + \sin^4 t + \dots + \sin^{2n-2} t$ .

**c)** Soit  $F_n'$  la fonction dérivée de  $F_n$ . Calculer  $F_n'(t)$ .

On établira que pour tout réel  $t$  de  $[0 ; \frac{\pi}{2}]$  on a :  $F_n'(t) = \frac{1 - \sin^{2n} t}{\cos t}$

**d)** Calculer  $F_n(0)$ .

**2. a)** Exprimer l'intégrale  $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} F_n'(t) dt$  en fonction de  $J_2$  et  $I_0$ . En déduire que :

$$F_n\left(\frac{\pi}{6}\right) = \alpha g\left(\frac{\pi}{6}\right) + \beta I_n \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes réelles à déterminer.}$$

**b)** En déduire la limite de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1}{5 \times 2^7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \times 2^{2n-1}}.$$