

EXERCICE 1 : (5 points)

1- a) Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}, z^3 - (1 - i)z^2 + z - 1 + i = 0$
Sachant qu'elle admet des solutions imaginaires pures.

b) dans le plan complexe (\mathcal{P}), les solutions $z_1 ; z_2 ; z_3$ de l'équation proposée ont pour images respectives les points A, B, C. Placer ces points dans (\mathcal{P}).

c) Déterminer le nombre complexe z_4 dont l'image est le point D, quatrième sommet du parallélogramme ABCD.

2- Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes z_1, z_2, z_3 .

3- a) Calculer $(2 + i)^2$.

b) Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}, iz^2 - iz - 1 + i = 0$.

EXERCICE 2 : (5 points)

1- On considère l'application polynôme P de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par :

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24.$$

a) Vérifier que $P(8) = 0$.

b) Ecrire P (x) sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

c) En déduire la résolution de l'inéquation : $(x \in \mathbb{R}), P(x) \leq 0$.

2- En utilisant les résultats de la question 1- Résoudre dans \mathbb{R} :

a) L'équation : $(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - 29 \ln x - 24 = 0$.

b) L'inéquation : $(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - 29 \ln x - 24 \leq 0$.

c) L'équation : $2^{3x} - 4 \cdot 2^{2x} - 29 \cdot 2^x - 24 = 0$.

3- Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-2; 1/3\}$ par :

$$f(x) = \frac{9x^2 + 14x - 1}{3x^2 + 5x - 2}$$

a) Vérifier que : $f(x) = 3 - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{3x-1}$.

b) En déduire les primitives de f sur \mathcal{D} .

4- On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{1 + U_n}$$

a) Prouver que, pour tout n , on a : $U_n > 0$.

b) On introduit la suite (V_n) , $n \in \mathbb{N}$ de terme général : $V_n = \frac{1}{U_n}$.

c) Prouver que la suite (V_n) est une suite arithmétique.

d) En déduire V_n en fonction de n , puis U_n en fonction de n .

e) Déterminer le comportement à l'infini de la suite (U_n) .

f) Pour quelles valeurs de x a-t-on : $e^{\ln(x+1)} \times e^{-\ln(2-x)} = U_0$?

PROBLEME : (10 points)

Soit la fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$.

(C) désigne sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2- a) Prouver que la droite (Δ_1) d'équation : $y = x + 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

b) Préciser la position de (C) par rapport à (Δ_1) .

3- a) Justifier que, pour tout x de \mathbb{R} , on a : $f(x) = x - 2 + \frac{4}{1 + e^x}$

b) En déduire que la droite (Δ_2) d'équation : $y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

c) Préciser la position de (C) par rapport à (Δ_2) .

4- a) prouver que pour tout x de \mathbb{R} : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f .
Dresser le tableau de variation de f .

5- Tracer les droites (Δ_1) et (Δ_2) , puis la courbe en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

6- Déterminer l'ensemble des primitives f de sur \mathbb{R} .