BAC **2000**

SERIES: MTE-TSEco-STG

EXERCICE 1 : (4 points)

On considère la fonction numérique f définie sur] 0 ; + ∞ [par $f(x)=\ln(e^x-1)$

1– a) Déterminer la dérivée de f.

b) En déduire la valeur de l'intégrale : $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x}{e^x-1}dx$.

2– Soit $K=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{1}{e^x-1}dx$

a) Calculer $I-K$

b) En déduire la valeur de K.

EXERCICE 2 : (6 points)

1– Soit f la fonction de ℝ vers ℝ définie par :

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)^2, si \quad x \angle 1 \\ f(x)=\ln x, \quad si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Démontrer que f est continue sur ℝ.

b) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2– On se propose de calculer l'intégrale :

$$J=\int_0^1\frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$$

a) Calculer les deux intégrales : $A=\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx$; $B=\int_0^1\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$

b) Déterminer trois nombres a, b et c tels que pour tout réel t positif ou nul, on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \qquad (1)$$

c) En posant t = e^x dans l'égalité (1) calculer l'intégrale $L = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}dx$

3– a) à l'aide d'une intégration par parties exprimer J en fonction de **L**.
b) En déduire la valeur de J.

<u>PROBLEME</u> : (10 points)

Soit f la fonction de ℝ vers ℝ définie sur ℝ−{ln2}par : $f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x-2)}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i};\vec{j})$.d'unité graphique 2 cm.

1– Prouver que la droite d'équation x = ln2 est asymptote verticale à (C).

2– a) Déterminer la limite de f en – **∞ ;**
b) Justifier que la droite (D_1) d'équation y = x est asymptote à (C) en – **∞.**

3– a) Etablir que pour tout x différent de ln2 on a :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2}$$

b) En déduire la limite de f en + **∞** et justifier que la droite (D_2) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en + **∞.**

4– a) Prouver que pour tout x de ℝ−{ln2}on a : $f'(x) = \frac{(e^x-1)(e^x-4)}{(e^x-2)^2}$.

b) Etudier le signe de f ‘ (x). En déduire le sens de variation de f.
Dresser le tableau de variation de f.

5– Tracer (C) et ses asymptotes dans le repère donné.

6– a) Déterminer les primitives sur l'intervalle] ln2 ; + **∞** [de la fonction g de ℝ vers ℝ par : $g(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$

b) En déduire la primitive sur] ln2 ; + **∞** [de la fonction g prenant la valeur 0 en ln3.